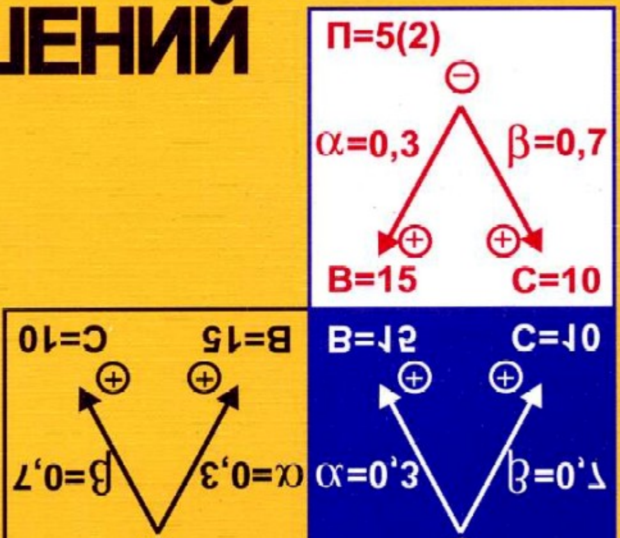
Б.Е.Одинцов

ОБРАТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ФОРМИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ



Б.Е.Одинцов

ОБРАТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ФОРМИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по образованию в области прикладной информатики
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 351400
"Прикладная информатика (по областям)"
и другим междисциплинарным специальностям

МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
2004

УДК [330.4:519.816](075.8)
ББК 65.050.2в6я73
О-42

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра информационного менеджмента и электронной коммерции МЭСИ
(заведующий кафедрой – доктор экономических наук, профессор В.В. Дик);
С.В. Черемных,
доктор технических наук, профессор
заведующий кафедрой математики и информационных технологий
Московской академии предпринимательства
при Правительстве г. Москвы

Одинцов Б.Е.
О-42 Обратные вычисления в формировании экономических решений: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 192 с.: ил.

ISBN 5-279-02902-5

Изложен метод формирования и поддержки принятия экономических решений на основе обратных вычислений. Рассмотрено три класса задач с ориентацией на экономику: формирование решений в условиях определенности с помощью детерминированных зависимостей, в условиях риска – с помощью стохастических зависимостей и в условиях неопределенности – с помощью нечетких множеств. Для решения задач использовано несколько форм представления знаний: дерево целей, дерево вероятностей, дерево вывода и нечеткие множества.

Для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная информатика (по областям)», а также по другим экономическим специальностям. Может быть полезно преподавателям и аспирантам, изучающим методы и инструментальные средства в формировании управленческих решений, проектировании экспертных систем и баз знаний.

$О\frac{1602090000-130}{010(01)-2004}111-2004$

УДК [330.4:519.816](075.8)
ББК 65.050.2в6я73

ISBN 5-279-02902-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обратные вычисления относятся к наиболее капризным и трудным задачам. Объясняется это непредсказуемостью поведения обратной функции, форма записи которой, как правило, либо неизвестна, либо представлена приближенно. Отсюда возникает проблема определения диапазонов исходных данных, при которых задача имеет решение.

Если прямые зависимости, получаемые в процессе изучения связей между событиями, отражают существующее положение вещей (воспроизводят «как есть») и обычно рассматриваются в качестве первичных, то обратные зависимости, полученные из уже имеющихся, с одной стороны, прямых зависимостей, а с другой – обратными функциями, находят, исходя из целей управления, которое отсутствует в прямых зависимостях.

Объективно обратные вычисления должны рассматриваться в качестве вторичных, так как зависят от целей воздействия на те или иные события, и их решение обусловлено прямыми задачами.

В пособии изложен один из методов решения обратных задач, названный автором обратными вычислениями. Специфика такого рода вычислений заключается в том, что они не требуют знания обратной функции. Метод ориентирован на получение отдельных значений аргументов прямой функции на основе задаваемого для нее прироста. Для того чтобы задача была корректной, она доопределяется с помощью дополнительной информации, касающейся целей решения обратной задачи. Вычисления называются точечными, так как позволяют найти некоторые точки в диапазоне возможных изменений аргументов функции.

Метод обратных вычислений имеет несколько модификаций, которые при решении одной и той же прикладной задачи дают различные результаты. Разница в результатах тем заметнее, чем больший требуется прирост функции. Какую из модификаций применять в каждом конкретном случае, зависит от специфики предметной области. Здесь необходимы дополнительные исследования, в результате выполнения которых можно было бы дать однозначный ответ на вопрос: «Какая модификация метода наиболее целесообразна в данном случае?».

В пособии рассмотрены задачи, которые поделены на три класса: детерминированные, стохастические и решаемые в условиях неопределенности. Для всех трех классов выведены типовые целевые установки, возникающие в процессе управления. Эти установки позволяют привести любую функцию, используемую для прямого расчета, к виду, который позволяет выполнить обратные вычисления.

Особенно подробно рассмотрены задачи, выраженные детерминированными зависимостями. Здесь удалось разработать достаточно простую процедуру свертки/развертки, которая позволяет сводить громоздкие исходные зависимости к функциям с двумя переменными. Такие функции обеспечивают использование стандартных операций для их обработки.

Задачи, решение которых предназначено для учета рисков, представлены следующими видами вероятностей:

безусловные вероятности наступления одного из несовместных событий;

безусловные вероятности наступления одного из совместных событий;

условные вероятности наступления всех возможных несовместных событий и т.д.

Здесь можно отметить, что формулы для прямых вероятностных расчетов уже известны. Отсюда обратные вычисления можно свести к набору стандартных процедур.

По мере повышения уровня интеллектуализации различного рода прикладных систем, в том числе и систем формирования решений, приходится все больше отказываться от детерминированных или стохастических зависимостей между событиями и переходить к средствам, способным воспроизводить условия неопределенности.

Детерминированные зависимости, как правило, чрезвычайно идеализируют связи между событиями, а применение стохастических связей ограничивается сложностью получения исходных данных.

Представление связей между событиями с помощью нечетких множеств первого и второго рода вынуждает прибегать к разработке специальных средств, позволяющих выполнять обратные вычисления. Для воздействия на реальные события в условиях неопределенности эти средства должны обеспечить:

сочетание субъективных оценок правил вывода с объективной информацией в базе данных, природа которых различна;

сочетание различных шкал, применяемых для измерения субъективной и объективной информации.

Применение обратных вычислений в условиях неопределенности, несмотря на всю свою перспективность, остается одним из самых малоразработанных направлений создания интеллектуальных систем.

Одна из глав (5-я) демонстрирует возможности некоторых модификаций метода в решении инженерных задач. Здесь для иллюстрации выбрано несколько типовых расчетов: логарифмические, степенные и показательные функции, а также вычисление площадей различных фигур, заданных определенными интегралами, решение дифференциальных уравнений в приложении к различным техническим задачам.

Настоящее издание является учебным, поэтому в нем не ставилась задача строгого доказательства тех или иных математических утверждений. Большинство из них достаточно прозрачны, а их корректность проиллюстрирована на многочисленных примерах.

Тщательное рассмотрение большинства возможных вариантов решения задач базируется на детерминированных зависимостях, что позволило остальные типы задач, а именно стохастические и задачи, решаемые в условиях неопределенности, представить не так полно, ибо появилась возможность делать соответствующие ссылки.

Большинство расчетов в экономике осуществляется на основе простейших арифметических формул, что позволяет сводить их с помощью специальной процедуры к функциям с двумя аргументами. Это упрощает проблему вычислений, так как появляется возможность обращаться к набору базовых, т.е. типовых, функций, для которых уже известны стандартные расчетные формулы.

Каждый конкретный случай формирования решений можно свести к набору типовых процедур, поэтому для удобства выполнения расчетов в конце учебного пособия приведены приложения, в которых находятся типовые целевые установки и используемые при этом стандартные формулы для обратных вычислений. В приложении 1 представлены типовые операции для обработки детерминированных зависимостей, в приложении 2 –

для вероятностных зависимостей, в приложении 3 – для приближенных рассуждений, а в приложении 4 – для логарифмических, показательных и степенных функций.

Автор считает своей обязанностью поблагодарить всех, кто прямо или косвенно поддерживал данное направление на протяжении многих лет. Это прежде всего касается Заслуженного деятеля науки РФ, д.э.н., проф. А.Н. Романова, который систематически стимулировал и направлял работу в данной области, а также д.э.н., проф. В.В. Дика, приложившего значительные усилия в разработке процедуры свертки/развертки, чьи критические замечания заметно способствовали улучшению качества рукописи.

В проверке результатов и разработке программного обеспечения, поддерживающего процесс решения обратных задач на детерминированных зависимостях, принимали участие студенты и аспиранты, перечислить которых невозможно. Всем им автор приносит свою благодарность.

Глава 1

ОСНОВЫ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1.1. Обратные задачи и обратные вычисления

Фундаментальные особенности человеческого восприятия окружающего мира предопределяет изучение его с помощью парных категорий, среди которых можно выделить следующие:

$$\underbrace{\begin{array}{l}\text{причина}\\ \text{затраты}\\ \text{средства}\end{array}}_{\textit{первично}} \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\end{array} \underbrace{\begin{array}{l}\text{следствие}\\ \text{результаты}\\ \text{достижение цели}\end{array}}_{\textit{вторично}}$$

При этом категория, находящаяся слева от стрелки, всегда является первичной, так как от нее зависит категория, находящаяся правее. Это позволило К. Попперу в своей книге «Открытая Вселенная: аргумент в пользу индетерминизма» сформулировать следующее: «...здравый смысл склонен утверждать, что любое явление обусловлено теми или иными предшествующими явлениями и поэтому любое явление может быть объяснено или предсказано...» [2].

Если данное утверждение принимается, то это значит, что принимается позиция Аристотеля, которая заключается в том, что главное предназначение науки состоит в изучении и объяснении причин, повлекших за собой те или иные события (последствия) в природе и обществе.

Результаты изучения подчиненности вторичных категорий первичным находят свое отражение с различной степенью адекватности в прямых зависимостях (следствий от причин, результатов от затрат, достижения целей от средств и т.д.). Эти зависимости воспроизводят существующее положение вещей, т.е. воссоздают «то, как есть».

В обобщенном виде результаты изучения прямых связей можно представить следующим образом:

$$\text{следствие} = f(\text{причина}),$$
$$\text{результат} = f(\text{затраты}),$$
$$\text{достижение цели} = \mathrm{f}(\text{средства}),$$

где f указывает на прямую связь между причиной и следствием, средствами и целью, затратами и результатами и т.д.

Внимательно вглядываясь в попперовско-аристотелевские разъяснения предназначения науки, мы, однако, не находим того, что объективно сопровождает всякую осмысленную деятельность человека и в том числе ученого, – это цель его деятельности. Между тем «изучение и объяснение» этих самых «причин» происходит с вполне определенной целью, преследуемой ученым.

Человек в силу своей природы после изучения «того, как есть» непременно инициирует процесс перехода к «тому как нужно». Человеку не свойственна лишь пассивная констатация фактов или событий, ему в подавляющих случаях требуется подчинить себе эти события, повлиять на них в соответствии со своими потребностями. Такого разъяснения мы не находим в цитированном труде.

Процесс перехода к «тому, как нужно», т.е. влияние на события, требует дополнения в зависимости между событиями информации, отражающей антропоморфные цели. Кроме того, сами зависимости должны рассматриваться «задом наперед». Если ранее в качестве ведущих понятий рассматривались причина, средства, затраты, а в качестве ведомых – следствие, цель, результаты, то теперь они должны поменяться местами. В обобщенном виде такую трансформацию можно представить следующим образом:

$$\text{причина} = g(\text{следствие}),$$
$$\text{затраты} = g(\text{результаты}),$$
$$\text{средства} = g(\text{цель}),$$

где g указывает на обратную зависимость между используемыми понятиями.

Здесь мы приходим к обратной задаче, ибо цель исследования событий как таковых принципиально отличается от цели исследования, результаты которого предназначены для последующего влияния на эти события человеком. Первичным является изучение и воспроизведение прямых связей, т.е. «того, как есть», вторичным – изучение обратных связей с целью изменения «того, как есть» на «то, как должно быть». При этом существует довольно важная особенность: изучение обратных связей возможно лишь при наличии результатов изучения прямых связей.

Существует фундаментальное различие между прямыми зависимостями (обозначенными ранее как f) и зависимостями, которые получают с целью последующего влияния на эти события (обозначенными как g). Если первые воспроизводят существующие связи между событиями, то вторые предназначены для нарушения, т.е. изменения этих связей в соответствии с внешними по отношению к ним целями. Получение обратных зависимостей и есть результат постановки и решения обратных задач. Вполне естественно, что главное внимание должно уделяться прямым зависимостям, ибо они цель и результат всякой науки. Вторичные (обратные) связи, не упоминающиеся в попперовско-аристотелевских воззрениях, находятся как бы в тени (в положении «золушки», ждущей своего часа). Их звездный час приходит лишь в том случае, если возникла потребность во вмешательстве в существующий ход событий, в его изменении в соответствии с целями управления.

Может возникнуть путаница в используемой терминологии. Поэтому обратимся к классическому изображению системы управления, представленной на рис. 1.1. Обычно в таких схемах используются термины прямая и обратная связь: прямая связь несет в себе директивную информацию, а обратная – отчет об исполнении предписаний. Чтобы избежать путаницы, будем употреблять эти термины, если в процессе управления обратные задачи на решаются. Тогда контур управления на этом рисунке представляется пунктирными линиями. Если же обратные задачи ставятся и решаются, то контур управления сохраняется, однако используемые при этом средства будут иными. На рассматриваемом рисунке он отражается с помощью сплошных линий.

Статус обратных зависимостей, рассматриваемых с позиции главного предназначения науки как чего-то второстепенного, не мог не повлиять на уровень развития многих прикладных систем

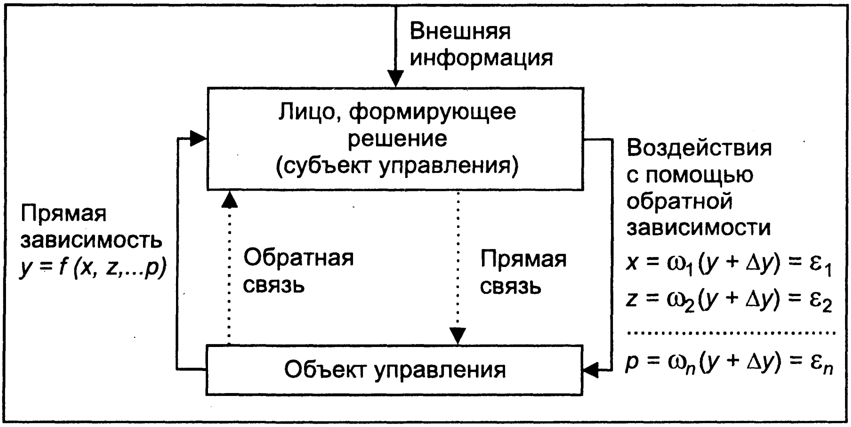


Рис. 1.1

экономической ориентации, разрабатываемых с целью вмешательства в какие-либо события. Ярким примером здесь могут служить стремительно распространившиеся в 1980-е годы экспертные системы, которые затем так же стремительно и увяли. Такая же участь постигла множество систем формирования или поддержки принятия решений.

Главная причина такого достаточно плачевного положения дел состоит в том, что эти системы изначально не в состоянии выдавать информацию, необходимую для воздействия на вполне реальные события, ибо в них не заложены основы такого воздействия – обратные зависимости. Наличие прямых зависимостей (детерминированных или стохастических) мало чем может помочь, ибо они воспроизводят «то, что есть». Верх возможностей такого рода систем – это констатация фактов, их анализ и ответ на вопрос: «Что будет, если?». В результате системы не могли ответить на вопрос: «Как сделать, чтобы?». Отсюда резкое угасание интереса к подобного рода системам, пессимизм, «разброд и шатание». Для того чтобы системы стали полезными, т.е. с их помощью можно было реально влиять на события, в основу их построения, кроме формализованных прямых зависимостей, должны быть положены и обратные, рассматриваемые сквозь призму антропоморфных целевых установок.

Для этого они должны уметь решать обратные задачи. Приведем примеры прямых и обратных к ним задач экономического профиля.

Системы, ориентированные на формирование решений в условиях определенности (детерминированные зависимости)

1. Прямая задача: Какова рентабельность предприятия?

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы рентабельность повысилась на А %?

2. Прямая задача: Какова конкурентоспособность предприятия?

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы конкурентоспособность повысилась на В единиц?

3. Прямая задача: Какова выручка предприятия за месяц?

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы выручка увеличилась на К единиц?

Системы, ориентированные на формирование решений в условиях неопределенности

1. Прямая задача: Каково доверие к заключению «Акции данного предприятия поднимутся в цене».

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы акции данного предприятия поднялись в цене на А единиц?

2. Прямая задача: Каково доверие к заключению «ВВП в будущем периоде увеличиться на К единиц».

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы «ВВП в будущем периоде увеличился на К единиц?»

3. Прямая задача: Каково доверие к заключению, что цены на энергоносители в будущем периоде снизятся?

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы цены на энергоносители в будущем периоде не снизились?

Системы, ориентированные на формирование решений в условиях риска (стохастические зависимости)

1. Прямая задача: Какова вероятность наступления одного из независимых событий?

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы данная вероятность повысилась?

2. Прямая задача: Определить вероятность того, что взятая наугад продукция окажется отличного качества.

Обратная задача: Что следует предпринять, чтобы взятая наугад продукция оказалась отличного качества.

Обратные связи воспроизводятся с помощью обратных функций, а задачи, решаемые с их помощью, получили название обратных. Основы систематических исследований обратных задач заложил академик А.Н. Тихонов в своей работе [1], опубликованной в 1943 г. Однако под обратными задачами он понимал изучение свойств объектов, недоступных или неудобных для непосредственного изучения. Поэтому подвергаются изучению те характеристики объекта, которые можно измерить, а затем на их основании отыскать закономерности в развитии самих объектов. А.Н. Тихоновым также введено следующее определение, имеющее теоретическую значимость: пусть некоторая совокупность элементов $\{x\}$ отображается функцией $f(x)$ на другую совокупность элементов $\{x^*\}$: $x^* = f(x)$. Такое отображение называется взаимно однозначным в точке x_0, если $x_0^* = f(x_0) \neq f(x)$ для любого элемента x, отличного от x_0.

Это определение позволяет доказать следующую теорему: пусть некоторое метрическое пространство R непрерывно отображается на другое метрическое пространство R^*, т.е. $x^* = f(x)$, $[x \in R, x^* \in R^*]$. Если это отображение взаимно однозначно в точке x_0 и пространство R компактно, то отображение $x = f^{-1}(x^*)$ также непрерывно в точке x^*.

В отличие от содержания обратных задач, исследуемых в работе [1], в нашем понимании такая задача характеризуется прежде всего целью управления, выраженной с помощью значения какого-либо экономического или другого показателя, и наличием прямой функции. Эта функция отражает зависимость следствия от причины, результатов – от затрат, уровня достижения цели – от затраченных для этого средств и т.д.

Обратные задачи характеризуются капризностью и трудоемкостью. Капризность заключается в непредсказуемости поведения функции, вид которой, как правило, либо неизвестен, либо известен приблизительно. Отсюда всегда существует проблема с определением диапазонов значений исходных данных, при которых задача, во-первых, имеет смысл, а во-вторых – имеет решение.

Так как обратную функцию получить трудно, а зачастую и невозможно, существует потребность в разработке метода, который позволил бы решать некоторые обратные задачи без нее. Решения для такого класса задач могут быть частичными, т.е. точечными, базирующимися не на области решений, а на некоторой ее точке.

Метод обратных точечных вычислений, представленный далее, требует немногого: корректно оформленных прямых зависимостей и дополнительной информации о целях, преследуемых лицом, формирующим решение. Дополнительная информация отражается в специально разработанной форме, названной «целевая установка». Эта форма позволяет достаточно просто трансформировать исходные формулы в соответствующие постановки обратных задач.

Решение обратных задач с помощью обратных вычислений – это получение точечных значений приростов аргументов прямой функции на основании ее задаваемого значения и дополнительной информации, поступающей от лица, формирующего решение. Точечными они называются потому, что отыскиваются новые значения аргументов лишь для одной заданной точки функции.

Дополнительная информация, используемая при этом, касается:

целевой установки лица, формирующего решение, выражаемой с помощью знаков (увеличение или уменьшение) приростов каждого из аргументов прямой функции;

приоритетности в путях достижения целей, отражаемой с помощью коэффициентов их относительной важности (КОВ).

Полученное решение задачи требует тщательного анализа, ибо вычисленные точечные значения неизвестной обратной зависимости могут быть бессмысленными. Анализироваться должны исходные данные, диапазон их значений, при которых задачи имеют решение. Семантический анализ исходных данных и полученных результатов – одна из обязательных процедур решения обратных задач.

Далее будут использоваться следующие рабочие термины:

прямая зависимость – выражение, отражающее связи между событиями (объектами), которые характеризуют состояние «как есть»;

прямые вычисления (расчеты), осуществляемые с помощью прямых функций;

обратная зависимость – выражение, отражающее цели, преследуемые лицом, формирующим решение;

обратные точечные вычисления, осуществляемые на основе обратных зависимостей, в результате которых получают искомые приросты аргументов прямой функции.

1.2. Применение обратных вычислений в экономике

Рассмотрим, каким образом можно использовать обратные вычисления для формирования управленческих решений, на примере повышения рентабельности предприятия. Подробно этот пример будет демонстрироваться в разд. 2.7, здесь же исследуем принципиальные возможности данного метода.

Рассмотрим дерево показателей, предназначенное для расчета рентабельности предприятия. Дерево имеет восемь уровней (рис. 1.2), что вполне достаточно для формирования предписаний различным службам предприятия, выполнение которых должно привести к повышению рентабельности. Стрелки указывают направление расчетов.

На рис. 1.2 не все терминальные (висячие) вершины достаточно детализированы. Например, активная часть основных фондов, от которой во многом зависит эффективность производства, представлена лишь одним показателем. Для реального принятия решений эти показатели должны детализироваться по структурным подразделениям, по классам основных фондов и т.д. То же касается и оборотного капитала, особенно показателей, характеризующих его отдельные элементы (технологический запас, производственный запас, страховой запас и т.д.).

Целевые установки, указанные лицом, формирующим решение, приведены на рис. 1.3. Коэффициенты относительной важности представлены в табл. 2.1.

Приведем расчетные формулы:

$$1.\ P = \frac{П}{Ф + О},$$

где P – рентабельность;

$П$ – чистая прибыль, полученная за анализируемый период;

$Ф$ – среднегодовая стоимость основных производственных фондов;

$О$ – месячная стоимость оборотных средств.

$$2.\ П = ПП + ПД - Н,$$

где $ПП$ – прибыль от продаж;

$ПД$ – прочие доходы, в том числе чрезвычайные;

$Н$ – налог на прибыль.

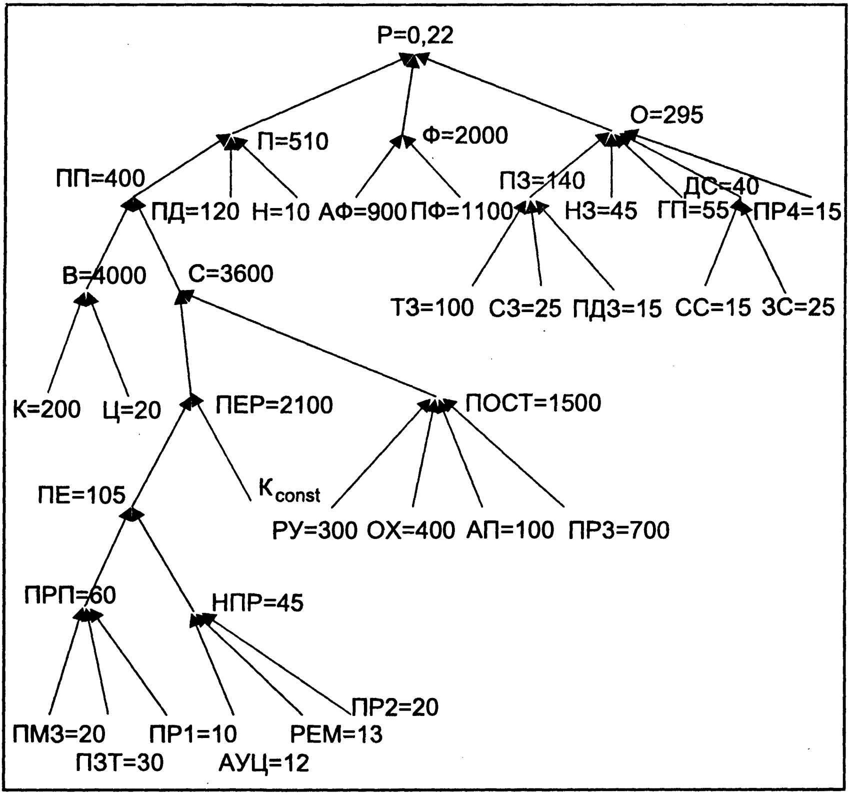


Рис. 1.2

$$3.\ ПП = В - С,$$

где $В$ – выручка от продажи товаров, продукции, работ, услуг за месяц;
$С$ – себестоимость товаров, продукции, работ, услуг за месяц.

$$4.\ В = К \cdot Ц,$$

где $К$ – объем выпуска продукции, шт.;
$Ц$ – цена единицы продукции, руб.

$$5.\ С = ПЕР + ПОСТ,$$

где $ПЕР$ – совокупные переменные расходы;
$ПОСТ$ – постоянные затраты.

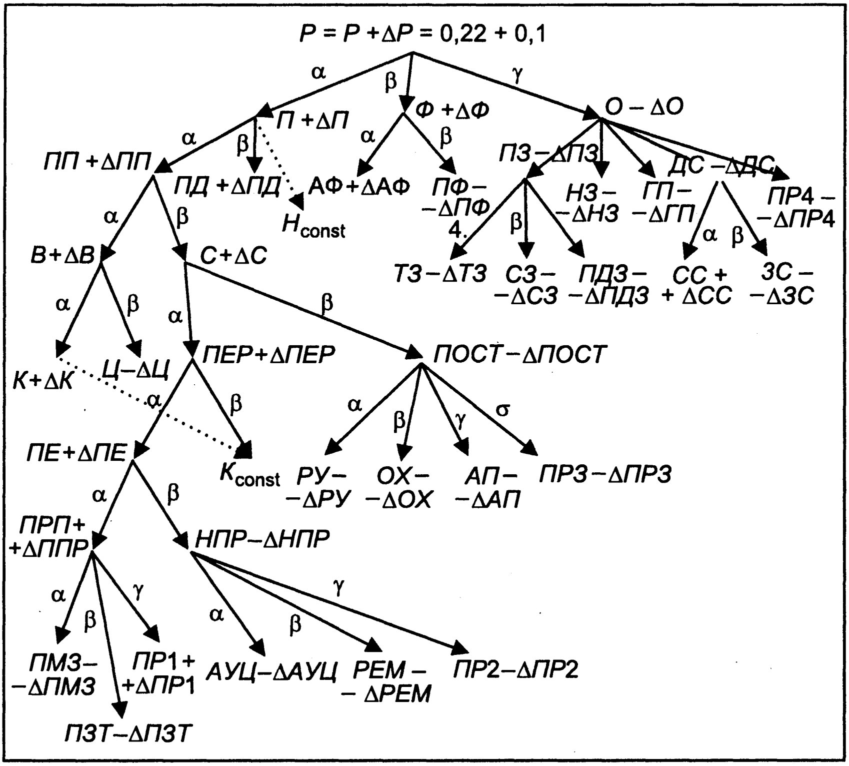


Рис. 1.3

$$6.\ ПЕР = К \cdot ПЕ,$$

где *К* – объем выпуска продукции, шт.;

ПЕ – переменные затраты, приходящиеся на единицу продукции.

$$7.\ ПЕ = ПРП + НПР,$$

где *ПРП* – производственные переменные затраты;

НПР – непроизводственные переменные затраты.

$$8.\ ПРП = ПМЗ + ПЗТ + ПР1,$$

где *ПМЗ* – прямые материальные затраты;

ПЗТ – прямые затраты на оплату труда;

*ПР*1 – прочие производственные переменные затраты.

$$9.\ НПР = АУЦ + РЕМ + ПР2,$$

где $АУЦ$ – содержание аппарата управления цехом;
$РЕМ$ – содержание и ремонт производственного оборудования;
$ПР2$ – прочие непроизводственные переменные затраты.

$$10.\ ПОСТ = РУ + ОХ + АП + ПР3,$$

где $РУ$ – затраты на оплату труда работников управления;
$ОХ$ – затраты на охрану;
$АП$ – затраты на аренду производственного инвентаря и производственных площадей;
$ПР3$ – прочие постоянные затраты.

$$11.\ Ф = АФ + ПФ,$$

где $АФ$ – активная часть основных производственных фондов;
$ПФ$ – пассивная часть основных производственных фондов.

$$12.\ О = ПЗ + НЗ + ГП + ДС + ПР4,$$

где $ПЗ$ – производственные запасы;
$НЗ$ – незавершенное производство;
$ГП$ – готовая продукция;
$ДС$ – денежные средства;
$ПР4$ – прочие элементы оборотного капитала.

Из перечисленных в формуле для $О$ элементов будут вычисляться лишь два, а именно:

$$13.\ ПЗ = ТЗ + СЗ + ПДЗ,$$

где $ТЗ$ – текущий запас;
$СЗ$ – страховой запас;
$ПДЗ$ – подготовительный запас.

$$14.\ ДС = СС + ЗС,$$

где $СС$ – собственные денежные средства;
$ЗС$ – заемные денежные средства.

Так как существует проблема повышения рентабельности, возникает обратная задача, которая формулируется следующим образом: на основании прямых зависимостей показателей;

информации о желаемых направлениях в изменениях показателей;

информации о приоритетности в изменениях показателей;

информации о желаемом приросте рентабельности

рассчитать приросты терминальных вершин дерева целей.

Граф показателей превращается в дерево целей с обратным направлением расчетов. На рис. 1.3 приоритеты в достижении каждой из подцелей (коэффициенты α, β...), а также знаки (плюс или минус) указывают, за счет чего необходимо достигать цели: уменьшения одних показателей или увеличения других. Например, часть прироста рентабельности, равной 0,5, должна быть обеспечена за счет увеличения прибыли (около показателя *П* указан знак плюс), другая ее часть, равная 0,3 – за счет повышения среднегодовой стоимости основных производственных фондов (около показателя *Ф* указан знак плюс), а оставшаяся часть прироста рентабельности, равная 0,2, должна быть достигнута за счет снижения оборотного капитала (около показателя *О* указан минус). Тогда КОВ на данном уровне дерева целей приобретают следующие значения: $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}3$; $\gamma = 0{,}2$. Сумма всех КОВ должна равняться единице, т.е. $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Аналогично расшифровывается дерево целей и на других уровнях.

В рассматриваемом примере решение обратной задачи с помощью обратных вычислений выполняется в такой последовательности:

вначале на основании заданного прироста рентабельности, коэффициентов α, β, γ, а также информации о направлениях в изменении показателей *П*, *Ф*, *О* определяются их новые значения: $П + \Delta П$, $Ф + \Delta Ф$ и $О - \Delta О$;

затем на основе новых значений показателей первого уровня, а также коэффициентов α, β, γ, ..., характеризующих приоритетность целей уже второго уровня, а также информации о направлениях в изменении показателей *ПП*, *ПД*, *АФ*, *ПФ*, *ПЗ* ... определяются новые значения показателей второго уровня: $ПП + \Delta ПП$, $ПД + \Delta ПД$, $АФ + \Delta АФ$, $ПФ - \Delta ПФ$, $ПЗ - \Delta ПЗ$ и т.д.

Процесс повторяется для всех уровней дерева целей.

Таким образом, на вопрос, что следует предпринять, чтобы рентабельность поднялась на ΔP, ответ будет следующим: для этого следует увеличить прибыль на $\Delta П$ единиц, нарастить среднегодовую стоимость основных производственных фондов на $\Delta Ф$

единиц и снизить величину оборотных средств на ΔO единиц. В свою очередь, для того чтобы поднять прибыль на $\Delta П$ единиц, необходимо увеличить прибыль от продаж на $\Delta ПП$ единиц и прочие доходы – на $\Delta ПД$ единиц. Процесс может продолжаться до тех пор, пока не будут вычислены новые значения показателей для всех терминальных вершин.

Более детально данный пример рассматривается в разд. 2.7.

Остается лишь добавить, что при создании реальных прикладных систем, полезных для формирования решений, следует учитывать ограничения на изменение показателей, находящихся на терминальном (самом нижнем) уровне дерева целей, дерева вывода или дерева вероятностей. Например, в результате выполнения вычислений может оказаться, что снижение себестоимости продукции на требуемую величину невозможно. Тогда задача должна быть решена за счет увеличения нагрузки в иных терминальных вершинах. Каким образом это можно достичь, будет рассмотрено в гл. 2.

1.3. Предварительные процедуры приведения функций к стандартному виду

Вид формул, обеспечивающих прямые вычисления, может быть сколь угодно разнообразным. Однако методика обратных точечных вычислений предполагает их приведение к стандартному виду. Для этого необходимо выполнить две операции.

1. Дополнить прямые функции информацией о целевых установках лица, формирующего решение.

2. Применить процедуру свертки/развертки для функций, имеющих больше двух аргументов.

Последняя операция не обязательна. Ее можно заменить решением системы с n уравнениями, где n – число аргументов в функции.

Первая операция, т.е. отражение целевых установок лица, формирующего решение, реализуется путем дополнения прямой функции следующей информацией:

направления изменений аргументов;

приоритетность в изменении аргументов (веса важности целей).

Результаты отражаются в аналитической или в графической форме. Можно использовать обе формы одновременно.

Направление изменения показателей указывается с помощью знаков плюс или минус (увеличение или уменьшение), а приоритетность целей – с помощью их коэффициентов относительной важности (КОВ).

Допустим, имеется формула, отражающая прямую зависимость рентабельности (y) от прибыли (x) и себестоимости продукции (z), что можно представить в виде:

$$y = \frac{x}{z}.$$

Тогда если у лица, формирующего решение, появилось желание повысить рентабельность за счет увеличения прибыли и снижения себестоимости, то такая целевая установка в формуле отразится следующим образом:

$$y^+ = \frac{x^+}{z^-}.$$

Однако это еще не все. Прирост рентабельности можно добиться в большей его части за счет увеличения прибыли, а в меньшей – за счет снижения себестоимости, или наоборот. Пропорции этих частей указываются с помощью КОВ.

Например, если 0,8 прироста рентабельности следует добиться за счет увеличения прибыли, а 0,2 – за счет снижения себестоимости, то тогда формула приобретает вид:

$$y^+ = \frac{x^+(\alpha)}{z^-(\beta)}, \ \alpha = 0,8, \ \beta = 0,2, \ \alpha + \beta = 1,$$

где α, β – коэффициенты относительной важности целей.

Эта же информация может быть представлена графически (рис. 1.4), где показано, что приросты для x и для z зависят не только от прироста Δy, но и от коэффициентов α и β.

Целевые установки лица, формирующего решение, могут быть и другими. Например, в том же примере необходимо значение y понизить за счет теперь уже снижения x и повышения z. Причем приоритетности в достижении подцелей должны поменяться местами. Тогда получим следующее аналитическое выражение:

$$y^- = \frac{x^-(\beta)}{z^+(\alpha)}.$$

Графически оно представлено на рис. 1.5.

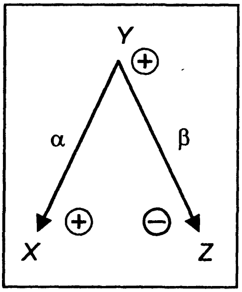


Рис. 1.4

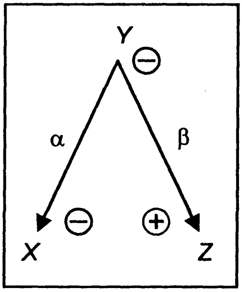


Рис. 1.5

Целевые установки могут быть самыми разными, однако они не должны противоречить здравому смыслу. Например, на прямой функции

$$y = x + z$$

невозможно организовать обратные вычисления для реализации следующей целевой установки:

$$y^{+} = x^{-}(\alpha) + z^{-}(\beta),$$

так как нельзя увеличить сумму двух элементов за счет их одновременного снижения.

В экономических расчетах нередко используются функции, число, аргументов в которых более двух. В этих случаях рекомендуется применять процедуры свертки/развертки, что позволит существенно упростить процесс обратных вычислений путем применения стандартных базовых конструкций.

Процедура свертки/развертки достаточно проста и основывается на введении фиктивных переменных, объединяющих блоки по два аргумента. Допустим, есть функция с тремя аргументами:

$$y^{+} = \frac{x^{+}(\alpha)}{z^{+}(\beta) + \kappa^{-}(\gamma)}, \text{ где } \beta > \gamma.$$

Руководствоваться здесь надлежит следующими правилами:

последовательно объединять попарно аргументы в группы, обозначая полученные пары новыми идентификаторами;

если знаки приростов полученных пар аргументов одинаковы, то общий знак прироста будет тот же, что и аргументов, в противном случае указывается знак аргумента, имеющего больший КОВ;

если знаки приростов полученных пар аргументов различны, но при этом одинаковы КОВ, то в качестве общего знака прироста указывается любой из них;

КОВ объединенной группы принимается равным сумме КОВ аргументов.

Для того чтобы рассматриваемую зависимость с тремя аргументами свести к зависимости с двумя аргументами, обозначим ее знаменатель через математическое выражение p. Тогда получим

$$y^{+}=\frac{x^{+}(\alpha)}{p^{+}(\beta+\gamma)}.$$

Знак около p указан плюс, так как $\beta > \gamma$.

Рассмотрим более сложное выражение

$$y^{-}=\frac{A^{-}(\alpha)}{\dfrac{B^{-}(\beta)+C^{+}(\gamma)}{E^{-}(\lambda)}}-\frac{M^{-}(\sigma)\cdot K^{+}(\theta)\cdot E^{-}(\eta)}{2},$$

где $\beta > \gamma$, $\sigma > \theta > \eta$, $\beta + \gamma > \lambda$, $\sigma > \theta + \eta$.

Введя обозначения

$$B^{-}(\beta)+C^{+}(\gamma)=O^{-}(\beta+\gamma);\quad \frac{O^{-}(\beta+\gamma)}{E^{-}(\lambda)}=R^{-}(\beta+\gamma+\lambda);$$

$$M^{-}(\sigma)\cdot P^{+}(\theta+\eta)=S^{-}(\sigma+\theta+\eta);$$

$$\frac{A^{-}(\alpha)}{R^{-}(\beta+\gamma+\lambda)}=D^{-}(\alpha+\beta+\gamma+\lambda);\quad K^{+}(\theta)\cdot E^{-}(\eta)=P^{+}(\theta+\eta),$$

получим

$$y^{-}=D^{-}(\alpha+\beta+\gamma+\lambda)-\frac{S^{-}(\sigma+\theta+\eta)}{2}.$$

После свертки функции вычисляют новые значения ее аргументов, что позволяет осуществить обратный процесс – развертку, выполняемую по следующим правилам:

определяется общий прирост, зависящий от суммы КОВ группы объединенных аргументов;

выполняется нормирование КОВ для отдельных аргументов по формулам:

$$\alpha'=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\quad \beta'=\frac{\beta}{\alpha+\beta};$$

определяется прирост аргументов, объединенных в группу.

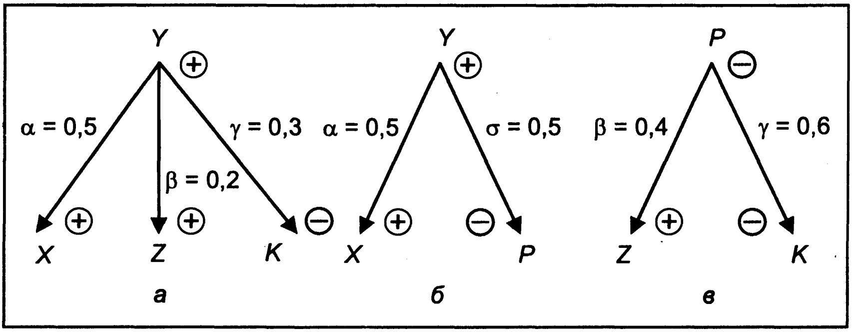


Рис. 1.6

Иллюстрацией приведенных правил может служить рис. 1.6, где представлена функция с тремя аргументами: вначале ее исходный вид (*а*), затем свернутый (*б*) и, наконец, развернутый (*в*).

1.4. Принцип выполнения обратных вычислений

Управление – это вмешательство в существующий ход событий с помощью соответствующих инструментальных средств. При этом предполагается, что известно желаемое значение показателя, отражающего цель управления.

В простейших случаях, при наличии аддитивной функции и если при этом знак желаемого прироста функции совпадает со знаками аргументов, задача решается просто. Для определения приростов аргументов достаточно прирост функции разделить пропорционально коэффициентам относительной важности аргументов. Допустим, известна следующая целевая установка (рис. 1.7):

$$A^{+} = B^{+}(\alpha) + C^{+}(\beta).$$

Известен прирост функции ΔA, который следует получить в результате увеличения обоих аргументов. Если известны пропорции, согласно которым должно произойти данное увеличение, то задача решается просто. Для этого следует прирост функции разделить пропорционально коэффициентам α и β. Получим:

$$\Delta B = \alpha \cdot \Delta A, \ \Delta C = \beta \cdot \Delta A,$$

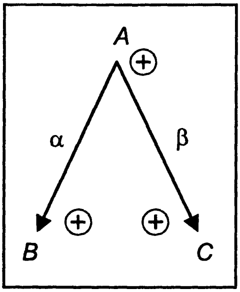


Рис. 1.7

откуда $B + \Delta B = B + \alpha \cdot \Delta A,$

$$C + \Delta C = C + \beta \cdot \Delta A.$$

Проверим результат.

Пусть $B = 20$, $C = 12$, $A = 32$, $\Delta A = 8$, $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 0{,}8$.

Тогда: $\Delta B = 0{,}2 \cdot 8 = 1{,}6$; $\Delta C = 0{,}8 \cdot 8 = 6{,}4$;

$B + \Delta B = 20 + 1{,}6 = 21{,}6$; $C + \Delta C = 12 + 6{,}4 = 18{,}4$;

$A + \Delta A = 21{,}6 + 18{,}4 = 40$.

Аналогично можно решить задачу, если знаки приростов всех аргументов и функции отрицательны. Однако возникает вопрос: Как определить приросты для функций, которые, во-первых, не являются аддитивными, а во-вторых, приросты аргументов имеют различные знаки? Например, можно ли добиться того же результата за счет повышения первого аргумента и снижения второго? Если пойти тем же путем, то можно получить следующее: $B + \Delta B = 20 + 1{,}6 = 21{,}6$; $C - \Delta C = 12 - 6{,}4 = 5{,}4$; $A + \Delta A = 21{,}6 + 5{,}4 = 27$.

Как видим, данное решение неправильное. Не будет правильного решения ни при кратных (дроби), ни при мультипликативных (произведения), ни при степенных и прочих функциях.

Если формулы, элементы которых указывают на уровень достижений той или иной цели, известны, то необходимо выработать основу или принцип, согласно которому будут определяться приросты аргументов имеющихся функций.

Таким принципом будет служить пропорциональное изменение прироста аргументов прямой функции согласно долям, указанных лицом, формирующим решение.

Пусть задана функция $y = f(x, z)$, причем согласно цели управления необходим ее прирост на величину Δy. Так как у функции два аргумента, прирост ее возможен за счет прироста либо первого аргумента, либо второго, или же за счет прироста обоих, или за счет прироста первого и снижения второго, или за счет уменьшения первого и увеличения второго. Первый вариант можно представить так: $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$, где Δy_1, Δy_2 – приросты функции, полученные за счет приростов первого и второго аргументов. Остальные варианты получают путем изменения знаков около приростов.

Для того чтобы узнать, какими должны быть приросты аргументов, можно задать следующие соотношения:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y} = \alpha; \ \frac{\Delta y_2}{\Delta y} = \beta,$$

что позволяет записать:

$$\frac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta y}}{\dfrac{\Delta y_2}{\Delta y}} = \frac{\dfrac{y(x \pm \Delta x, z) - y(x, z)}{\Delta y}}{\dfrac{y(x, z \pm \Delta z) - y(x, z)}{\Delta y}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Если, например, $\alpha = 0,75$, а $\beta = 0,25$ то данное соотношение следует понимать так: 0,75 от всего прироста функции будет получено за счет прироста аргумента x, а 0,25 – за счет прироста аргумента z. Коэффициенты α и β – это КОВ аргументов или целей, которые эти аргументы представляют. Они задаются вначале и позволяют отыскать приросты $\pm\Delta x$ и $\pm\Delta z$. Это напоминает задачу факторного анализа, поставленную наоборот.

Так как больший интерес представляет соотношение между приростами аргументов, запишем:

$$\frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}{\dfrac{\Delta z}{\Delta y}} = \frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Далее будем пользоваться именно этим соотношением.

Для того чтобы задача обратных вычислений была доопределена, ее следует дополнить еще одним выражением:

$$y \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x, z \pm \Delta z).$$

Принимая во внимание, что $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \alpha\Delta y + \beta\Delta y$, можно записать следующее условие: $\alpha + \beta = 1$.

Отсюда задачу обратных вычислений для функции с двумя аргументами в общем виде можно записать как систему уравнений вида:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x(\alpha), z \pm \Delta z(\beta), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Здесь выражения $\Delta x(\alpha)$ и $\Delta z(\beta)$ указывают на функциональную зависимость прироста Δx от коэффициента α, а прироста Δz – от коэффициента β. Обязательным условием выступает ограничение $\alpha + \beta = 1$. Прирост Δy задается, а неизвестными являются приросты $\pm\Delta x$ и $\pm\Delta z$.

Если функция содержит более двух аргументов, то возможны два пути решения задачи:

- создать систему уравнений, число которых соответствует числу аргументов;
- обратиться к процедуре свертки/развертки, которая позволяет свести многоаргументную функцию к двум аргументам.

Рассмотри первый путь. Пусть задана функция с тремя аргументами:

$$y = f(x, z, p).$$

Прирост функции возможен за счет прироста (положительного или отрицательного) всех трех аргументов, т.е.

$$\pm\Delta y = \pm\Delta y_1 \pm \Delta y_2 \pm \Delta y_3,$$

где $\pm\Delta y$ – общий прирост функции;

$\pm\Delta y_1$, $\pm\Delta y_2$, $\pm\Delta y_3$ – приросты функции, полученные за счет приростов первого, второго и третьего аргументов.

Как и ранее, можно задавать соотношения приростов аргументов, обеспечивающих необходимый прирост соответствующей части прироста функции. Например,

$$\frac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta y}}{\dfrac{\Delta y_2 + \Delta y_3}{\Delta y}} = \frac{\dfrac{y(x \pm \Delta x, z, p) - y(x, z, p)}{\Delta y}}{\dfrac{y(x, z \pm \Delta z, p \pm \Delta p) - y(x, z, p)}{\Delta y}} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma},$$

где α, β, γ – КОВ целей, отражаемых аргументами x, z и p.

Для решения задач будем пользоваться более простыми выражениями:

$$\frac{\Delta x}{\Delta z + \Delta p} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$$

или

$$\frac{\Delta z}{\Delta x + \Delta p} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}.$$

Тогда задачу обратных вычислений для функций с тремя аргументами можно решить с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} y \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x(\alpha), \\ z \pm \Delta z(\beta),\ p \pm \Delta p(\gamma)), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z + \Delta p} = \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}, \\ \dfrac{\Delta z}{\Delta x + \Delta p} = \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma}. \end{cases}$$

Как и ранее, в качестве ограничений используются неравенства вида:

$$\Delta x \le \Delta \overline{x}, \quad \Delta z \le \Delta \overline{z}, \quad \Delta p \le \Delta \overline{p}.$$

Здесь $\Delta x(\alpha)$, $\Delta z(\beta)$, $\Delta p(\gamma)$, как и прежде, есть выражения, которые указывают на функциональную зависимость соответствующих приростов от коэффициентов относительной важности α, β и γ.

Глава 2

ОСНОВЫ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2.1. Решение задач с помощью индивидуальных коэффициентов прироста аргументов

Пусть задана функция $y = f(x, z)$. В соответствии с целевыми установками как сама функция, так и ее аргументы могут либо увеличиваться, либо уменьшаться. Вначале рассмотрим варианты, в которых учитывается лишь желание лица, принимающего решение, увеличить значение функции.

С помощью индивидуальных коэффициентов, т.е. коэффициентов, вычисляемых для каждого из аргументов функции, целевую установку можно учесть следующим образом: если прирост положительный, то индивидуальный коэффициент должен умножаться на свой аргумент, если отрицательный, то делиться. Учитывая возможные знаки приростов аргументов, можно получить четыре варианта целевых установок.

1. Целевая установка: $y^+ = f(x^+(\alpha), z^+(\beta))$.

Здесь и далее сумма КОВ всегда равна единице, т.е. $\alpha + \beta = 1$. Введем индивидуальные коэффициенты, с помощью которых определяются искомые приросты аргументов:

$$x + \Delta x = k_1 x,$$
$$z + \Delta z = k_2 z.$$

Это позволяет записать задачу обратных вычислений в следующем виде:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(k_1 x, k_2 z), \\ \dfrac{k_1 x - x}{k_2 z - z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Поскольку $y + \Delta y$ здесь уже рассматриваются в качестве аргумента, от которого зависят приросты Δx и Δz, следует определить диапазон исходных значений Δy, α и β, при которых задача имеет смысл.

Для этого следует решить систему неравенств вида:

$$\begin{cases} k_1 > 1, \\ k_2 > 1. \end{cases}$$

П р и м е р. Известна зависимость прибыли $П$ от выручки B и себестоимости продукции С, которую можно представить в виде

$$П = B - C.$$

Целевая установка состоит в следующем: необходимо повысить прибыль за счет увеличения выручки и себестоимости, причем большая часть прироста прибыли должна произойти за счет увеличения выручки, а меньшая – за счет повышения себестоимости. Такая целевая установка представляется следующим образом:

$$П^+ = B^+(\alpha) - C^+(\beta), \ \alpha > \beta.$$

Введем индивидуальные коэффициенты:

$$B + \Delta B = k_1 B,$$

$$C + \Delta C = k_2 C.$$

Представим задачу обратных вычислений в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} П + \Delta П = k_1 B - k_2 C, \\ \dfrac{k_1 B - B}{k_2 C - C} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее относительно k_1 и k_2, получим:

$$k_1 = \frac{П + \Delta П + k_2 C}{B},$$

$$k_2 = \frac{\alpha C + \beta(П + \Delta П) - \beta B}{C(\alpha - \beta)}.$$

Проверка (рис. 2.1). $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $B = 20$; $C = 12$; $П = 8$; $\Delta П = 4$;

$k_1 = 1{,}35$; $k_2 = 1{,}25$; $B + \Delta B = 1{,}35 \cdot 20 = 27$;

$C + \Delta C = 1{,}25 \cdot 12 = 15$; $П + \Delta П = 27 - 15 = 12$.

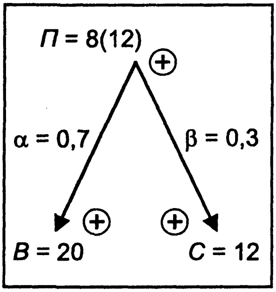


Рис. 2.1

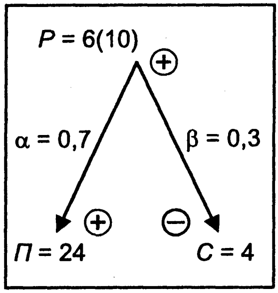


Рис. 2.2

Какими граничными значениями должны обладать $\Delta П$, α и β, чтобы задача имела решение, укажет система следующих неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{П + \Delta П + k_2 C}{B} > 1 \\ \dfrac{\alpha C + \beta(П + \Delta П) - \beta B}{C(\alpha - \beta)} > 1. \end{cases}$$

2. Целевая установка: $y^+ = f(x^+(\alpha), z^-(\beta))$.

Как и ранее, введем индивидуальные коэффициенты:

$$x + \Delta x = k_1 x,$$

$$z - \Delta z = \frac{z}{k_2}.$$

Задача примет вид системы:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(k_1 x, \dfrac{z}{k_2}), \\ \dfrac{k_1 x - x}{z - \dfrac{z}{k_2}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Система неравенств, используемая для определения приемлемых значений входных данных, та же, что и в целевой установке 1.

Пример. Известна зависимость рентабельности P от прибыли $П$ и себестоимости продукции C. Одна из формул расчета рентабельности имеет вид $P = \dfrac{П}{C}$. Пусть целевая установка следующая: повысить рентабельность за счет увеличения прибыли и снижения себестоимости, причем большая часть прироста рентабельности должна произойти за счет наращивания прибыли, а меньшая – за счет снижения себестоимости. Такая целевая установка представляется следующим образом:

$$P^{+} = \frac{П^{+}(\alpha)}{C^{-}(\beta)}, \alpha > \beta.$$

Введем индивидуальные коэффициенты:

$$П + \Delta П = k_1 П,$$

$$C - \Delta C = \frac{C}{k_2}.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} P + \Delta P = \dfrac{k_1 П}{\dfrac{C}{k_2}}, \\ \dfrac{k_1 П - П}{C - \dfrac{C}{k_2}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее относительно k_1 и k_2, получим:

$$k_1 = \frac{\alpha + \beta P}{\beta P + \dfrac{\alpha P}{P + \Delta P}}, \quad k_2 = \frac{P + \Delta P}{k_1 P}.$$

Проверка (рис. 2.2). $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $П = 24$; $C = 4$; $P = 6$; $\Delta P = 4$; $k_1 = 1{,}126$; $k_2 = 1{,}48$; $П + \Delta П = 1{,}126 \cdot 24 = 27{,}024$;

$$C - \Delta C = \frac{4}{1{,}48} = 2{,}703; \quad P + \Delta P = \frac{27{,}024}{2{,}703} = 9{,}9978 \approx 10.$$

Возможный диапазон исходных данных α, β, ΔP определяется на основе решения следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{P + \Delta P}{k_1 P} > 1, \\ \dfrac{\alpha + \beta P}{\beta P + \dfrac{\alpha P}{P + \Delta P}} > 1. \end{cases}$$

3. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{-}(\alpha), z^{+}(\beta))$.

Как и ранее, введем индивидуальные коэффициенты:

$$x - \Delta x = \frac{x}{k_1},$$

$$z + \Delta z = k_2 z.$$

Задача обратных вычислений примет вид:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(\dfrac{x}{k_1}, k_2 z), \\ \dfrac{x - \dfrac{x}{k_1}}{k_2 z - z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Система неравенств, используемая для поиска приемлемых значений входных данных, та же.

Пример (рис. 2.3). Среднегодовая стоимость основных производственных фондов Φ рассчитывается по формуле

$$\Phi = A\Phi + \Pi\Phi,$$

где $A\Phi$ – среднегодовая стоимость активной части основных производственных фондов;

$\Pi\Phi$ – среднегодовая стоимость пассивной части основных производственных фондов.

Согласно рассматриваемой целевой установке необходимо повысить среднегодовую стоимость основных производственных фондов за счет снижения $A\Phi$ и повышения $\Pi\Phi$. Прирост следует добиться большей частью за счет увеличения $\Pi\Phi$.

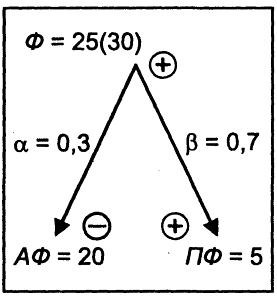


Рис. 2.3

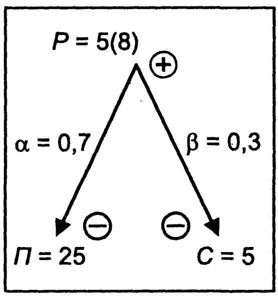


Рис. 2.4

Это отражается в формуле расчета следующим образом:

$$\Phi^{+} = A\Phi^{-}(\alpha) + \Pi\Phi^{+}(\beta), \beta > \alpha.$$

Введем индивидуальные коэффициенты:

$$A\Phi - \Delta A\Phi = \frac{A\Phi}{k_1};$$

$$\Pi\Phi + \Delta\Pi\Phi = k_2 \Pi\Phi.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi + \Delta\Phi = \dfrac{A\Phi}{k_1} + k_2 \Pi\Phi, \\ \dfrac{A\Phi - \dfrac{A\Phi}{k_1}}{k_2 \Pi\Phi - \Pi\Phi} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$k_1 = \frac{A\Phi(\beta - \alpha)}{\beta A\Phi + \alpha \Pi\Phi - \alpha(\Phi + \Delta\Phi)};$$

$$k_2 = \frac{(\Phi + \Delta\Phi) - \dfrac{A\Phi}{k_1}}{\Pi\Phi}.$$

Проверка. $\Phi = 25$; $\Delta\Phi = 5$; $A\Phi = 20$; $\Pi\Phi = 5$; $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $= 1{,}54$; $k_2 = 3{,}4$;

$$A\Phi - \Delta A\Phi = \frac{A\Phi}{k_1} = \frac{20}{1{,}54} = 12{,}99; \; \Pi\Phi + \Delta\Pi\Phi = k_2 \Pi\Phi = 3{,}4 \cdot 5 = 17;$$

$$\Phi + \Delta\Phi = 12{,}99 + 17 = 29{,}99 \approx 30.$$

4. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{-}(\alpha), z^{-}(\beta))$.

Как и ранее, введем индивидуальные коэффициенты:

$$x - \Delta x = \frac{x}{k_1},$$

$$z - \Delta z = \frac{z}{k_2}.$$

Задача обратных вычислений примет вид системы:

$$\begin{cases} y+\Delta y = f(\dfrac{x}{k_1}, \dfrac{z}{k_2}), \\ \dfrac{x-\dfrac{x}{k_1}}{z-\dfrac{z}{k_2}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Ограничения те же.

П р и м е р (рис. 2.4). Обратимся к примеру, рассмотренному в целевой установке 2. Однако зададимся целью повышения рентабельности, но уже за счет понижения как прибыли, так и себестоимости. Большая часть прироста должна быть обеспечена за счет снижения прибыли. Такая целевая установка запишется следующим образом:

$$P^{+} = \frac{П^{-}(\alpha)}{C^{-}(\beta)}, \alpha > \beta.$$

Это достаточно редкая установка, но и она может встретиться в практике управления.

Введем индивидуальные коэффициенты приростов:

$$П - \Delta П = \frac{П}{k_1},$$

$$C - \Delta C = \frac{C}{k_2}.$$

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} P+\Delta P = \dfrac{\dfrac{П}{k_1}}{\dfrac{C}{k_2}}, \\ \dfrac{П-\dfrac{П}{k_1}}{C-\dfrac{C}{k_2}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Отсюда получим:

$$k_1 = \frac{\dfrac{\alpha CP}{P+\Delta P} - \beta \varPi}{\alpha C - \beta \varPi};$$

$$k_2 = \frac{k_1(P+\Delta P)}{P}.$$

Проверка. $P = 5$; $\Delta P = 3$; $\varPi = 25$; $C = 5$; $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $k_1 = 1{,}33$; $k_2 = 2{,}128$;

$$\varPi - \Delta\varPi = \frac{\varPi}{k_1} = \frac{25}{1{,}33} = 18{,}797;$$

$$C - \Delta C = \frac{C}{k_2} = \frac{5}{2{,}128} = 2{,}35;$$

$$P + \Delta P = \frac{18{,}797}{2{,}35} = 7{,}99 \approx 8.$$

В приведенных примерах рассмотрены целевые установки, требующие положительного прироста функции. Нередки случаи, когда необходимо уменьшить значение функции за счет изменения одного или обоих аргументов. Такого рода задачи возникают в процессе управления затратами, себестоимостью, фондоемкостью и т.д. Рассмотрим некоторые целевые установки, имеющие в практике наибольшее распространение. Ограничения на область исходных данных те же, что и ранее.

5. Целевая установка: $y^- = f(x^+(\alpha), z^+(\beta))$.

Как и ранее, введем индивидуальные коэффициенты, с помощью которых определяются искомые приросты аргументов:

$$x + \Delta x = k_1 x,$$

$$z + \Delta z = k_2 z.$$

Это позволяет записать задачу обратных вычислений в следующем виде:

$$\begin{cases} y - \Delta y = f(k_1 x, k_2 z), \\ \dfrac{k_1 x - x}{k_2 z - z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Пример (рис. 2.5). Воспользуемся примером из целевой установки 1, с той лишь разницей, что заменим в ней знак прироста функции на противоположный. Получим

$$П^{-} = B^{+}(\alpha) - C^{+}(\beta).$$

Для того чтобы задача имела решение, соотношение у КОВ должно быть следующее: $\beta > \alpha$.

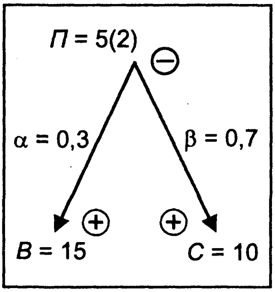


Рис. 2.5

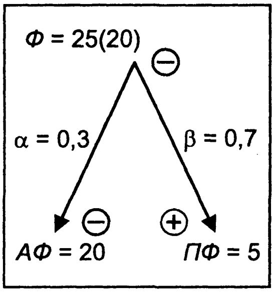


Рис. 2.6

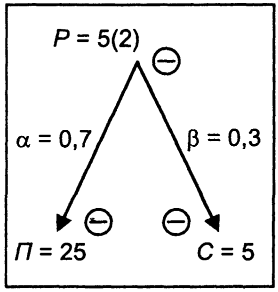


Рис. 2.7

Введем, как и ранее, индивидуальные коэффициенты:

$$B + \Delta B = k_1 B,$$
$$C + \Delta C = k_2 C.$$

Представим задачу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} П - \Delta П = k_1 B - k_2 C, \\ \dfrac{k_1 B - B}{k_2 C - C} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее относительно k_1 и k_2, получим:

$$k_1 = \frac{\beta B + \alpha(П - \Delta П) - \alpha C}{B(\beta - \alpha)},$$

$$k_2 = \frac{k_1 B - (П - \Delta П)}{C}.$$

Проверка. $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $B = 15$; $C = 10$; $П = 5$; $\Delta П = 3$; $k_1 = 1{,}15$; $k_2 = 1{,}53$; $B + \Delta B = 1{,}15 \cdot 15 = 17{,}25$;

$$C + \Delta C = 1{,}53 \cdot 10 = 15{,}3;\ П - \Delta П = 17{,}25 - 15{,}3 = 1{,}95 \approx 2.$$

6. Целевая установка: $y^- = f(x^-(\alpha), z^+(\beta))$.

Как и ранее, используя индивидуальные коэффициенты прироста, запишем задачу обратных вычислений:

$$\begin{cases} y - \Delta y = f(\dfrac{x}{k_1}, k_2 z), \\ \dfrac{x - \dfrac{x}{k_1}}{k_2 z - z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Система неравенств, используемая для поиска приемлемых значений входных данных, та же.

Пример (рис. 2.6). Воспользуемся исходными данными из целевой установки 3, однако изменим задачу в соответствии с целевой установкой 6. Будем считать, что объем производственных фондов необходимо понизить за счет снижения $АФ$, но одновременного повышения $ПФ$; изменения производить большей частью за счет $ПФ$. Согласно такой целевой установке получим:

$$Ф^- = АФ^-(\alpha) + ПФ^+(\beta), \beta > \alpha.$$

Введем индивидуальные коэффициенты:

$$АФ - \Delta АФ = \frac{АФ}{k_1};$$

$$ПФ + \Delta ПФ = k_2 ПФ.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} Ф - \Delta Ф = \dfrac{АФ}{k_1} + k_2 ПФ, \\ \dfrac{АФ - \dfrac{АФ}{k_1}}{k_2 ПФ - ПФ} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$k_1 = \frac{АФ(\beta - \alpha)}{\beta АФ + \alpha ПФ - \alpha(Ф - \Delta Ф)}; \quad k_2 = \frac{(Ф - \Delta Ф) - \dfrac{АФ}{k_1}}{ПФ}.$$

Очевидно, что задача имеет решение лишь при $\beta > \alpha$.

Проверка. $Ф = 25$; $\Delta Ф = 5$; $АФ = 20$; $ПФ = 5$; $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $k_1 = 3{,}478$; $k_2 = 2{,}85$;

$$АФ - \Delta АФ = \frac{АФ}{k_1} = \frac{20}{3{,}478} = 5{,}75;$$

$$ПФ + \Delta ПФ = k_2 ПФ = 2{,}85 \cdot 5 = 14{,}25;$$

$$Ф - \Delta Ф = 5{,}75 + 14{,}25 = 20.$$

7. Целевая установка: $y^- = f(x^-(\alpha), z^-(\beta))$.

Как и ранее, введем индивидуальные коэффициенты:

$$x - \Delta x = \frac{x}{k_1},$$

$$z - \Delta z = \frac{z}{k_2}.$$

Задача обратных вычислений примет вид системы

$$\begin{cases} y - \Delta y = f\left(\dfrac{x}{k_1}, \dfrac{z}{k_2}\right), \\ \dfrac{x - \dfrac{x}{k_1}}{z - \dfrac{z}{k_2}} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Ограничения те же.

П р и м е р (рис. 2.7). Обратимся к примеру, рассмотренному в целевой установке 2. Однако зададимся целью снизить рентабельность за счет понижения как прибыли, так и себестоимости. Большая часть отрицательного прироста должна быть обеспечена за счет снижения прибыли. Такая целевая установка запишется следующим образом:

$$P^- = \frac{П^-(\alpha)}{C^-(\beta)}, \alpha > \beta.$$

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} P-\Delta P=\dfrac{\dfrac{П}{k_1}}{\dfrac{C}{k_2}}, \\ \dfrac{П-\dfrac{П}{k_1}}{C-\dfrac{C}{k_2}}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Отсюда получим:

$$k_1=\frac{\dfrac{\alpha CP}{P-\Delta P}-\beta П}{\alpha C-\beta П};$$

$$k_2=\frac{k_1(P-\Delta P)}{P}.$$

Проверка. $P=5$; $\Delta P=3$; $П=25$; $C=5$; $\alpha=0{,}7$; $\beta=0{,}3$; $k_1=4$; $k_2=1{,}6$;

$$П-\Delta П=\frac{П}{k_1}=\frac{25}{4}=6{,}25;$$

$$C-\Delta C=\frac{C}{k_2}=\frac{5}{1{,}6}=3{,}125;$$

$$P-\Delta P=\frac{6{,}25}{3{,}125}=2.$$

2.2. Решение задач на основе единого коэффициента прироста аргументов

Пусть, как и ранее, задана функция $y=f(x, z)$. Введем величину k_0, которая, будучи умноженной на КОВ каждого из аргументов, позволит получить желаемый для них прирост.

8. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{+}(\alpha), z^{+}(\beta))$.

Введем единую величину k_0 и получим искомые приросты следующим образом:

$$\Delta x = \alpha \cdot k_0,$$
$$\Delta z = \beta \cdot k_0.$$

Задача обратных вычислений заключается в поиске величины k_0 из уравнения

$$y + \Delta y = f(x + \alpha k_0, z + \beta k_0).$$

П р и м е р (рис. 2.8). Умножением количества на цену получают выручку, приобретенную в результате реализации продукции. Формула расчета имеет вид:

$$P = К \cdot Ц,$$

где P – выручка;
$К$ – количество продукции;
$Ц$ – продажная цена.

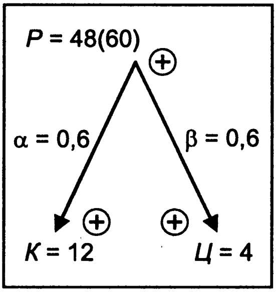


Рис. 2.8

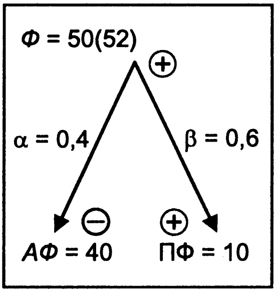


Рис. 2.9

Допустим, целевая установка следующая: нарастить выручку за счет увеличения количества продаваемой продукции и ее цены. При этом большая часть выручки должна быть получена за счет увеличения количества ($\alpha > \beta$). Такая установка отразится следующим образом:

$$P^{+} = К^{+}(\alpha) \cdot Ц^{+}(\beta), \alpha > \beta.$$

Введем величину k_0 и получим:

$$\Delta K = \alpha k_0;\ \Delta Ц = \beta k_0;$$
$$P + \Delta P = (K + \alpha k_0)(Ц + \beta k_0);$$
$$k_0 = \frac{-(\alpha Ц + \beta K) \pm \sqrt{(\alpha Ц + \beta K)^2 + 4\alpha\beta\Delta P}}{2\alpha\beta}.$$

Вполне очевидным ограничением на исходные данные служит следующее неравенство:

$$\sqrt{(\alpha Ц + \beta K)^2 + 4\alpha\beta\Delta P} > -(\alpha Ц + \beta K).$$

Проверка. $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$; $K = 12$; $Ц = 4$; $P = 48$; $\Delta P = 12$; $k_0 = 1{,}58$; $\Delta K = 0{,}6 \cdot 1{,}58 = 0{,}95$; $\Delta Ц = 0{,}4 \cdot 1{,}58 = 0{,}63$;

$$K + \Delta K = 12 + 0{,}95 = 12{,}95;\ Ц + \Delta Ц = 4 + 0{,}63 = 4{,}63;$$
$$P + \Delta P = 12{,}95 \cdot 4{,}63 = 59{,}958 \approx 60.$$

9. Целевая установка: $y^+ = f(x^+(\alpha), z^-(\beta))$.

Задача заключается в поиске величины k_0 из следующего уравнения:

$$y + \Delta y = f(x + \alpha k_0, z - \beta k_0).$$

Пример. Воспользуемся примером из целевой установки 2, имеющей вид

$$P^+ = \frac{П^+(\alpha)}{C^-(\beta)},\ \alpha > \beta,$$

где P – рентабельность;
$П$ – прибыль;
C – себестоимость продукции.

Введем величину k_0 и получим:

$$\Delta П = \alpha k_0;\ \Delta C = \beta k_0;$$
$$P + \Delta P = \frac{П + \alpha k_0}{C - \beta k_0};$$
$$k_0 = \frac{\Delta P \cdot C}{\beta(P + \Delta P) + \alpha}.$$

Проверка. $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $П = 24$; $C = 4$; $P = 6$; $\Delta P = 4$; $k_0 = 4{,}32$; $\Delta П = 0{,}7 \cdot 4{,}32 = 3{,}02$; $\Delta C = 0{,}3 \cdot 4{,}32 = 1{,}3$; $П + \Delta П = 27{,}02$;

$$C - \Delta C = 2{,}7;\ P + \Delta P = \frac{27{,}02}{2{,}7} = 10.$$

10. Целевая установка: $y^+ = f(x^-(\alpha), z^+(\beta))$.

В общем виде задача запишется следующим образом:

$$y + \Delta y = f(x - \alpha k_0, z + \beta k_0).$$

П р и м е р (рис. 2.9). Обратимся к задаче из целевой установки 3, где речь шла о среднегодовой стоимости основных производственных фондов $Ф$, которая рассчитывалась по формуле

$$Ф = АФ + ПФ,$$

где $АФ$ – среднегодовая стоимость активной части основных производственных фондов;

$ПФ$ – среднегодовая стоимость пассивной части основных производственных фондов.

Как и ранее, будем считать, что необходимо нарастить среднегодовую стоимость основных производственных фондов за счет снижения $АФ$ и повышения $ПФ$. Прирост следует добиться большей частью за счет увеличения $ПФ$.

Это отражается в формуле расчета следующим образом:

$$Ф^+ = АФ^-(\alpha) + ПФ^+(\beta), \beta > \alpha.$$

Введем величину k_0 и получим:

$$\Delta АФ = \alpha k_0;\ \Delta ПФ = \beta k_0;\ \Delta Ф = k_0(\alpha - \beta);\ k_0 = \frac{\Delta Ф}{\beta - \alpha}.$$

Проверка. $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}6$; $АФ = 40$; $ПФ = 10$; $Ф = 50$; $\Delta Ф = 2$; $k_0 = 10$; $\Delta АФ = 4$; $\Delta ПФ = 6$; $АФ - \Delta АФ = 36$; $ПФ + \Delta ПФ = 16$; $Ф + \Delta Ф = 36 + 16 = 52$.

11. Целевая установка: $y^+ = f(x^-(\alpha), z^-(\beta))$.

В общем виде задача запишется так:

$$y + \Delta y = f(x - \alpha k_0, z - \beta k_0).$$

П р и м е р . Вернемся к целевой установке 9 и рассмотрим, можно ли решить задачу повышения рентабельности путем одновременного уменьшения прибыли и себестоимости продукции с помощью единого коэффициента. Тогда целевая установка запишется следующим образом:

$$P^{+} = \frac{П^{-}(\alpha)}{C^{-}(\beta)},$$

где P – рентабельность;

$П$ – прибыль;

C – себестоимость продукции.

Как и ранее, введем величину k_0 и получим:

$$\Delta П = \alpha k_0;\ \Delta C = \beta k_0;$$

$$P + \Delta P = \frac{П - \alpha k_0}{C - \beta k_0};$$

$$k_0 = \frac{C \cdot \Delta P}{\beta(P + \Delta P) - \alpha}.$$

Проверка. $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $П = 24$; $C = 4$; $P = 6$; $\Delta P = 4$; $k_0 = 6{,}96$; $\Delta П = 0{,}7 \cdot 6{,}96 = 4{,}87$; $\Delta C = 0{,}3 \cdot 6{,}96 = 2{,}09$; $П - \Delta П = 24 - 4{,}87 = 19{,}13$; $C - \Delta C = 4 - 2{,}09 = 1{,}91$; $P + \Delta P = \dfrac{19{,}13}{1{,}91} = 10{,}015 \approx 10.$

Теперь рассмотрим случаи снижения значения функции.

12. Целевая установка: $y^{-} = f(x^{+}(\alpha), z^{+}(\beta))$.

В общем виде задача запишется так:

$$y - \Delta y = f(x + \alpha k_0, z + \beta k_0).$$

П р и м е р (рис. 2.10). Воспользуемся примером из целевой установки 1, в котором прибыль $П$ определяется путем вычитания себестоимости продукции C из выручки B:

$$П = B - C.$$

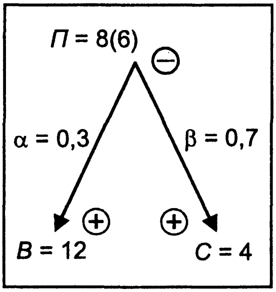


Рис. 2.10

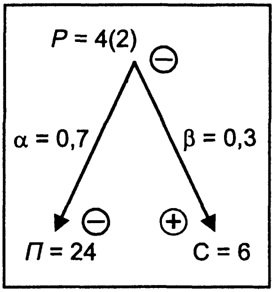


Рис. 2.11

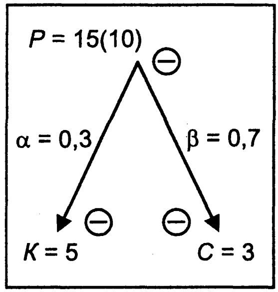


Рис. 2.12

Изменив знак прироста функции, получим следующую целевую установку:

$$П^{-} = B^{+}(\alpha) - C^{+}(\beta).$$

Решая уравнение

$$A - \Delta A = (B + \alpha k_0) - (C + \beta k_0),$$

где

$$\Delta B = \alpha k_0,\ \Delta C = \beta k_0,$$

получим

$$k_0 = \frac{\Delta A}{\beta - \alpha}.$$

Проверка. $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $B = 12$; $C = 4$; $П = 8$; $\Delta П = 2$; $k_0 = 5$; $\Delta B = 0{,}3 \cdot 5 = 1{,}5$; $\Delta C = 0{,}7 \cdot 5 = 3{,}5$; $П - \Delta П = (12 + 1{,}5) - (4 + 3{,}5) = 6$.

13. Целевая установка: $y^{-} = f(x^{-}(\alpha), z^{+}(\beta))$.

В общем виде задача запишется так:

$$y - \Delta y = f(x - \alpha k_0, z + \beta k_0).$$

Пример (рис. 2.11). Обратимся к примеру, рассмотренному в целевой установке 2. Однако теперь зададимся иной целью, которая будет заключаться в понижении рентабельности за счет уменьшения прибыли и повышения себестоимости. Большая часть прироста должна быть обеспечена за счет уменьшения прибыли. Такая целевая установка запишется следующим образом:

$$P^{-} = \frac{П^{-}(\alpha)}{C^{+}(\beta)},\ \alpha > \beta.$$

Решив уравнение относительно k_0, получим:

$$k_0 = \frac{П - C(P - \Delta A)}{\beta(P - \Delta P) + \alpha}.$$

Проверка. $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,3$; $П = 24$; $C = 6$; $P = 4$; $\Delta P = 2$; $k_0 = 9,23$;

$$P - \Delta P = \frac{24 - 0,7 \cdot 9,23}{6 + 0,3 \cdot 9,23} = 2.$$

14. Целевая установка: $y^{-} = f(x^{-}(\alpha), z^{-}(\beta))$.

В общем виде задача запишется так:

$$y - \Delta y = f(x - \alpha k_0, z - \beta k_0).$$

Пример (рис. 2.12). Затраты на перевозку продукции рассчитываются по формуле:

$$P = K \cdot C,$$

где P – затраты на перевозку;
K – количество перевозимой продукции;
C – стоимость перевозки единицы продукции.

Допустим, целевая установка следующая: снизить затраты на перевозку за счет снижения количества перевозимой продукции и стоимости перевозки единицы продукции. Большая часть снижения затрат должна произойти за счет снижения количества продукции. Такая целевая установка отразиться следующим образом:

$$P^{-} = K^{-}(\alpha) \cdot C^{-}(\beta).$$

Введем величину k_0. Тогда задача обратных вычислений запишется в виде:

$$P - \Delta P = (K - \alpha k_0)(C - \beta k_0),$$

откуда получим:

$$k_0 = \frac{K\beta + C\alpha \pm \sqrt{(K\beta + C\alpha)^2 + 4\alpha\beta\Delta P}}{2\alpha\beta}.$$

Проверка. $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,7$; $K = 5$; $C = 3$; $P = 15$; $\Delta P = 5$; $k_0 = 1,21$; $P - \Delta P = (5 - 0,3 \cdot 1,21)(3 - 0,7 \cdot 1,21) = 9,967 \approx 10$.

Иногда у пользователя при наличии функции, с числом аргументов больше двух нет желания применять процедуру свертки/

развертки. В этом случае лицо, формирующее решение, сталкивается с проблемой решения уравнений n-й степени. Если такая перспектива для него приемлема, то процесс расчетов сокращается.

П р и м е р. Численность вспомогательных рабочих $Ч$ определяется по формуле

$$Ч = M \cdot C \cdot K,$$

где M – число мест вспомогательных рабочих;
C – количество рабочих смен;
K – коэффициент списочного состава.

Необходимо за счет увеличения всех аргументов повысить численность вспомогательного состава. Такая целевая установка отразится следующим образом:

$$Ч^{+} = M^{+}(\alpha) \cdot C^{+}(\beta) \cdot K^{+}(\gamma).$$

Если, как и ранее, ввести величину k_0, то можно получить:

$$\Delta M = \alpha k_0;\ \Delta C = \beta k_0;\ \Delta K = \gamma k_0.$$

Это позволяет записать задачу в виде:

$$Ч + \Delta Ч = (M + \alpha k_0)(C - \beta k_0)(K + \gamma k_0).$$

Отсюда получим:

$$\alpha\beta\gamma k_0^3 + \alpha\beta K k_0^2 + (\alpha CK + \beta MK + \gamma CM + \alpha\gamma C + \beta\gamma M)k_0 - \Delta Ч = 0.$$

Решить это уравнение можно с помощью метода Кардано.

Подобным образом можно вывести уравнения для любого числа аргументов, что, однако, вынуждает прибегать к численным решениям уравнений высших порядков.

2.3. Решение задач без коэффициентов прироста аргументов

Пусть задана функция $y = f(x, z)$. Целевые установки, учитывающие пожелания пользователя, остаются прежними. Вначале рассмотрим варианты, учитывающие увеличение функции, а затем ее снижение.

15. Целевая установка: $y^+ = f(x^+(\alpha), z^+(\beta))$.

Если не вводить индивидуальные коэффициенты, то задачу обратных вычислений можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(x + \Delta x,\ z + \Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

В такой постановке надлежит пользоваться следующими ограничениями:

$$\begin{cases} \Delta x > 0, \\ \Delta z > 0. \end{cases}$$

Пример (рис. 2.13). Воспользуемся зависимостью из целевой установки 1, где фигурируют прибыль Π, выручка B и себестоимость продукции C. Эта зависимость представляется в виде формулы

$$\Pi = B - C.$$

Целевая установка состоит в следующем: необходимо нарастить прибыль за счет повышения выручки и себестоимости, причем большая часть прироста прибыли должна произойти за счет повышения прибыли, а меньшая – за счет повышения себестоимости. Такая целевая установка отражается следующим образом:

$$\Pi^+ = B^+(\alpha) - C^+(\beta),\ \ \alpha > \beta.$$

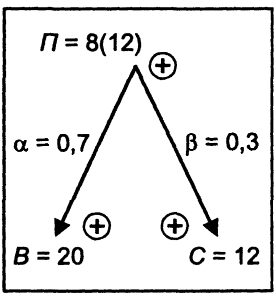


Рис. 2.13

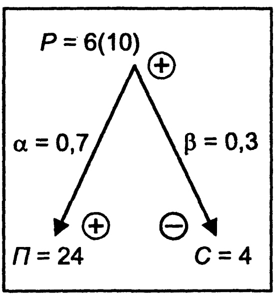


Рис. 2.14

Представим эту задачу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} П + \Delta П = B + \Delta B - (C - \Delta C), \\ \dfrac{\Delta B}{\Delta C} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее относительно ΔB и ΔC, получим:

$$\Delta B = \frac{\alpha}{\beta} \Delta C,$$

$$\Delta C = \frac{\Delta A}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 1}.$$

Проверка. $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $B = 20$; $C = 12$; $П = 8$; $\Delta П = 4$; $\Delta C = 3$; $\Delta B = 7$; $B + \Delta B = 27$; $C + \Delta C = 15$; $П + \Delta П = 27 - 15 = 12$.

Какими граничными значениями должны обладать Δy, α и β, чтобы задача имела решение, укажет система следующих неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} \Delta C > 0, \\ \dfrac{\Delta A}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 1} > 1. \end{cases}$$

Одним из очевидных ограничений является неравенство

$$\alpha > \beta.$$

В качестве примера здесь использована аддитивная функция, для которой отыскивались приросты с одинаковыми знаками. В п. 1.3 было показано, что в таких частных случаях задачу можно решить путем пропорционального деления прироста функции и добавления результатов деления к ее аргументам. Этого не сделано с целью демонстрации общности метода обратных вычислений без коэффициентов прироста аргументов.

16. Целевая установка: $y^+ = f(x^+(\alpha), z^-(\beta))$.

Задача обратных вычислений принимает вид:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(x + \Delta x, z - \Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Пример (рис. 2.14). Воспользуемся примером из целевой установки 2, в которой рентабельность P рассчитывается делением прибыли $П$ на себестоимость продукции C. Пусть целевая установка остается прежней, т.е. необходимо увеличить рентабельность за счет повышения прибыли и снижения себестоимости, причем большая часть увеличения рентабельности должна произойти за счет повышения прибыли, а меньшая – за счет снижения себестоимости. Такая целевая установка представляется следующим образом:

$$P^+ = \frac{П^+(\alpha)}{C^-(\beta)}, \alpha > \beta.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} P + \Delta P = \dfrac{П + \Delta П}{C - \Delta C}, \\ \dfrac{\Delta П}{\Delta C} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее относительно $\Delta П$ и ΔC, получим:

$$\Delta C = \frac{(P + \Delta P)C - П}{P + \Delta P + \dfrac{\alpha}{\beta}},$$

$$\Delta П = \frac{\alpha \Delta C}{\beta}.$$

Неравенствами для поиска приемлемых диапазонов исходных данных служат выражения: $\Delta C > 0$ и $\Delta П > 0$.

Проверка. $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $П = 24$; $C = 4$; $P = 6$; $\Delta P = 4$; $\Delta C = 1{,}3$; $\Delta П = 3$; $П + \Delta П = 27$; $C + \Delta C = 2{,}7$; $P + \Delta P = \dfrac{27}{2{,}7} = 10$.

17. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{-}(\alpha), z^{+}(\beta))$.

Задача обратных вычислений принимает вид:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(x - \Delta x,\ z + \Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Пример (рис. 2.15). Прибыль $П_п$, направляемая на потребление, и прибыль $П_и$, направляемая на инвестиции, составляют общую прибыль, равную

$$П = П_п + П_и,$$

где $П$ – общая прибыль.

Необходимо определить, какими должны быть величины $П_п$ и $П_и$, чтобы $П$ увеличилась на величину $\Delta П$. Прибыль $П_п$ должна снизиться, а прибыль $П_и$ – увеличиться. Большая часть $\Delta П$ должна возникнуть за счет увеличения $П_и$, а меньшая – за счет $П_п$. Такая целевая установка отражается следующим образом:

$$П^{+} = П_п^{-}(\alpha) + П_и^{+}(\beta), \ \ \alpha < \beta.$$

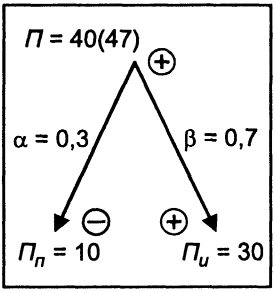


Рис. 2.15

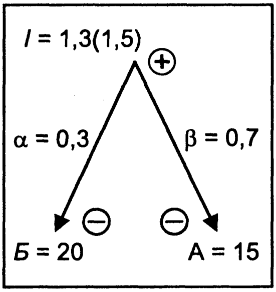


Рис. 2.16

Представим эту задачу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} П + \Delta П = (П_п - \Delta П_п) + (П_и + \Delta П_и), \\ \dfrac{\Delta П_п}{\Delta П_и} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\Delta П_{п} = \frac{\alpha}{\beta} \Delta П_{и},$$

$$\Delta П_{и} = \frac{\Delta П}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}.$$

Очевидным ограничением служит выражение $\alpha < \beta$.

Проверка. $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $П_{п} = 10$; $П_{и} = 30$; $П = 40$; $\Delta П = 7$; $\Delta П_{п} = 5{,}26$; $\Delta П_{и} = 12{,}28$; $П_{п} - \Delta П_{п} = 10 - 5{,}26 = 4{,}74$; $П_{и} + \Delta П_{и} = 30 + 12{,}28 = 42{,}28$; $П + \Delta П = 4{,}74 + 42{,}28 = 47{,}02 \approx 47$.

18. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{-}(\alpha), z^{-}(\beta))$.

Задача обратных вычислений принимает вид:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(x - \Delta x,\ z - \Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Как правило, задача имеет решение при $\alpha < \beta$.

Пример (рис. 2.16). Индекс прибыли рассчитывается по формуле

$$I = \frac{Б}{A},$$

где I – индекс прибыли;
$Б$ – прибыль базового периода;
A – прибыль анализируемого периода.

Необходимо поднять индекс за счет снижения прибыли как в базовом, так и в анализируемом периодах. Большая часть снижения должна произойти за счет снижения прибыли в анализируемом периоде. Такая целевая установка отразится следующим образом:

$$I^{+} = \frac{Б^{-}(\alpha)}{A^{-}(\beta)}.$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} I+\Delta I=\dfrac{Б-\Delta Б}{A-\Delta A}, \\ \dfrac{\Delta Б}{\Delta A}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим:

$$\Delta A=\frac{A(I+\Delta I)-Б}{I+\Delta I-\dfrac{\alpha}{\beta}},\ \ \Delta Б=\frac{\alpha}{\beta}\Delta A.$$

Проверка. $Б$ = 20; A = 15; I = 1,3; ΔI = 0,17; α = 0,3; β = 0,7; ΔA = 2,31; $\Delta Б$ = 0,99; $Б - \Delta Б$ = 20 – 0,989 = 19,01; $A - \Delta A$ = 15 – – 2,31 = 12,69; $I+\Delta I=\dfrac{19{,}01}{12{,}69}=1{,}498\approx 1{,}5.$

Теперь рассмотрим задачи, решение которых позволяет снизить значение функции.

19. Целевая установка: $y^{-} = f(x^{+}(\alpha), z^{+}(\beta))$.

Задача обратных вычислений принимает вид:

$$\begin{cases} y-\Delta y=f(x+\Delta x,\ z+\Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Пример (рис. 2.17). Воспользуемся зависимостью из целевой установки 1, где прибыль $П$ рассчитывается на основе выручки B и себестоимости продукции C. Расчет выполняется по формуле

$$П=B-C.$$

Целевая установка состоит в следующем: необходимо снизить прибыль, однако выручка и себестоимость должны повыситься. При этом большая часть снижения прибыли должна произойти за счет повышения себестоимости. Такая целевая установка отражается следующим образом:

$$П^{-}=B^{+}(\alpha)-C^{+}(\beta),\ \beta>\alpha.$$

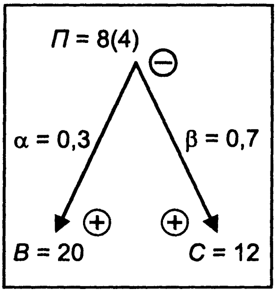


Рис. 2.17

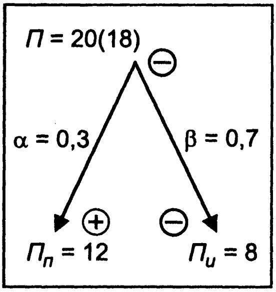


Рис. 2.18

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} П - \Delta П = B + \Delta B - (C - \Delta C), \\ \dfrac{\Delta B}{\Delta C} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее относительно ΔB и ΔC, получим:

$$\Delta B = \frac{\alpha C}{\beta}, \Delta C = \frac{\Delta A}{1 - \dfrac{\alpha}{\beta}}.$$

Ограничением служит выражение $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1.$

Проверка. $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $B = 20$; $C = 12$; $П = 8$; $\Delta П = 4$; $\Delta C = 7$; $\Delta B = 2{,}99$; $B + \Delta B = 22{,}99$; $C + \Delta C = 19$; $П - \Delta П = 22{,}99 - 19 = 3{,}99 \approx 4$.

20. Целевая установка: $y^{-} = f(x^{+}(\alpha), z^{-}(\beta))$.

Задача обратных вычислений принимает вид:

$$\begin{cases} y - \Delta y = f(x + \Delta x, z - \Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Пример (рис. 2.18). Прибыль $П_п$, направляемая на потребление, и прибыль $П_и$, направляемая на инвестиции, составляют общую прибыль $П$, равную

$$П = П_п + П_и.$$

Целевая установка следующая: необходимо снизить общую сумму прибыли, причем большая часть отрицательного прироста прибыли должна быть обеспечена за счет увеличения прибыли, направляемой на потребление, и меньшей – за счет прибыли, направляемой на инвестиции. Такая целевая установка запишется следующим образом:

$$П^- = П_п^+(\alpha) + П_и^-(\beta).$$

Это позволяет сформулировать следующую задачу обратных вычислений:

$$\begin{cases} П - \Delta П = П_п + \Delta П_п + (П_и - \Delta П_и), \\ \dfrac{\Delta П_п}{\Delta П_и} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\Delta П_п = \frac{\alpha \Delta П_и}{\beta},$$

$$\Delta П_и = -\frac{\Delta П}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 1}.$$

Ограничением служит выражение $\alpha < \beta$.

Проверка. $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $П_п = 12$; $П_и = 8$; $П = 20$; $\Delta П = 2$; $\Delta П_и = 3{,}5$; $\Delta П_п = 1{,}5$; $П_п + \Delta П_п = 12 + 1{,}5 = 13{,}5$; $П_и - \Delta П_и = 8 - 3{,}5 = 4{,}5$; $П - \Delta П = 13{,}5 + 4{,}5 = 18$.

21. Целевая установка: $y^- = f(x^-(\alpha), z^+(\beta))$.

Запишем задачу обратных точечных вычислений:

$$\begin{cases} y - \Delta y = f(x - \Delta x, z + \Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Пример (рис. 2.19). Воспользуемся целевой установкой 20, но изменим знак первого аргумента на минус, а второго – на плюс. Кроме того, большая часть отрицательного прироста функции должна быть получена за счет первого аргумента. Такая целевая установка запишется следующим образом:

$$П^- = П_п^-(\alpha) + П_и^+(\beta).$$

Задача обратных вычислений примет вид:

$$\begin{cases} П - \Delta П = П_п - \Delta П_п + (П_и + \Delta П_и), \\ \dfrac{\Delta П_п}{\Delta П_и} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\Delta П_п = \frac{\alpha \Delta П_и}{\beta},$$

$$\Delta П_и = \frac{\Delta П}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 1}.$$

Ограничением служит выражение: $\alpha > \beta$.

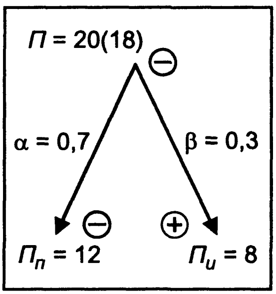


Рис. 2.19

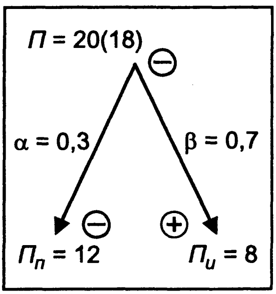


Рис. 2.20

Проверка. $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $П_п = 12$; $П_и = 8$; $П = 20$; $\Delta П = 2$; $\Delta П_и = 1{,}5$; $\Delta П_п = 3{,}49$; $П_п - \Delta П_п = 12 - 3{,}49 = 8{,}51$; $П_и + \Delta П_и = 8 + 1{,}5 = 9{,}5$; $П - \Delta П = 8{,}51 + 9{,}5 = 18{,}01 \approx 18$.

22. Целевая установка: $y^- = f(x^-(\alpha), z^-(\beta))$.

Задача обратных вычислений в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} y - \Delta y = f(x - \Delta x, z - \Delta z), \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

П р и м е р (рис. 2.20). Воспользуемся примером из целевой установки 20, но изменим знак обоих аргументов на минус. Кроме того, будем считать, что большая часть отрицательного прироста функции должна быть получена за счет второго аргумента. Такая целевая установка запишется следующим образом:

$$П^- = П_п^-(\alpha) + П_и^-(\beta).$$

Рассматриваемая задача примет вид:

$$\begin{cases} П - \Delta П = П_п - \Delta П_п + (П_и - \Delta П_и), \\ \dfrac{\Delta П_п}{\Delta П_и} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\Delta П_п = \frac{\alpha \Delta П_и}{\beta},$$

$$\Delta П_и = -\frac{\Delta П}{1 + \dfrac{\alpha}{\beta}}.$$

Проверка. $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$; $П_п = 12$; $П_и = 8$; $П = 20$; $\Delta П = 2$; $\Delta П_и = 1{,}399$; $\Delta П_п = 0{,}599$; $П_п - \Delta П_п = 12 - 0{,}599 = 11{,}4$; $П_и - \Delta П_и = 8 - 1{,}399 = 6{,}6$; $П - \Delta П = 11{,}4 + 6{,}6 = 18$.

Эта задача содержит аддитивную функцию и одинаковые знаки приростов, поэтому она может быть решена также простым делением прироста функции между аргументами (см. п. 1.3).

2.4. Решение задач без указания приоритетности целей

Достаточно часто важность целей установить или невозможно, или затруднительно. Иногда такая характеристика не интересует лицо, формирующее решение. Например, если у функции 7 – 10 аргументов, то определить важность целей, отражаемых с их помощью, весьма проблематично. Существуют специально разработанные для этого методы, например, метод анализа иерархий Саати, однако этот и другие методы требуют значительных дополнительных усилий [7]. Очень часто перед лицом, формирующим решение, стоит задача добиться цели без указания каких-либо приоритетов в путях ее достижения. В таких случаях задача обратных точечных вычислений упрощается и сводится к решению уравнений с одним неизвестным. Им служит единый коэффициент, на который следует либо умножить, либо разделить исходные значения аргументов, чтобы получить желаемый прирост функции.

Как и ранее, функция дополняется целевыми установками, однако КОВ отсутствуют.

Пусть задана функция $y = f(x, z)$. Как и ранее, в соответствии с целевыми установками возникают следующие варианты обратных точечных вычислений:

$$y^{\pm} = f(x^{\pm}, z^{\pm}).$$

Как видим, КОВ отсутствуют.

23. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{+}, z^{+})$.

Если ввести единый коэффициент k, то можно получить:

$$x + \Delta x = kx;$$

$$z + \Delta z = kz.$$

Задача обратных вычислений примет вид:

$$y + \Delta y = f(kx, kz).$$

П р и м е р (рис. 2.21). Воспользуемся задачей из целевой установки 1, где речь шла об исчислении прибыли по формуле $П = В - С$, а $П$ — прибыль; $В$ – выручка; $С$ – себестоимость продукции.

Допустим, целевая установка состоит в следующем: необходимо повысить прибыль за счет увеличения выручки и себестоимости. Такая целевая установка представляется следующим образом:

$$П^{+} = B^{+} - C^{+}.$$

Представим эту задачу в виде выражения:

$$П + \Delta П = B + \Delta B - (C + \Delta C).$$

Введем величину k и запишем:

$$B + \Delta B = kB,$$

$$C + \Delta C = kC.$$

$$П + \Delta П = kB - kC = k(B - C),$$

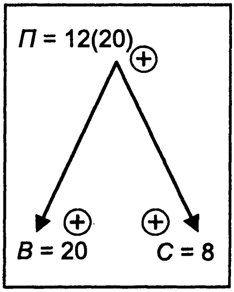


Рис. 2.21

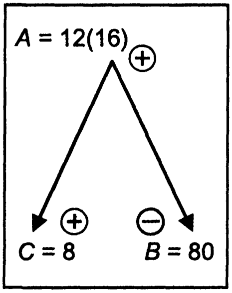


Рис. 2.22

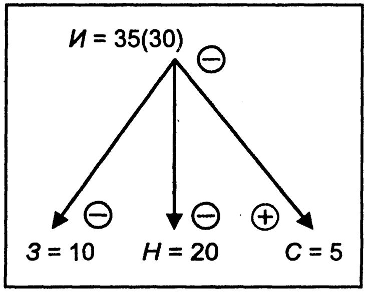


Рис. 2.23

откуда получим

$$k = \frac{П + \Delta П}{П}.$$

Проверка. $В = 20$; $С = 8$; $П = 12$; $\Delta П = 8$; $k = 1{,}66$; $П + \Delta П = 1{,}66 \cdot 20 - 1{,}66 \cdot 8 = 20{,}05 \approx 20$.

24. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{+}, z^{-})$.

Задача обратных вычислений имеет вид: $y + \Delta y = f(kx, \frac{z}{k})$.

Пример. Обратимся к задаче из целевой установки 2, предназначенной для расчета рентабельности по формуле

$$Р = \frac{П}{С},$$

где $Р$ – рентабельность;
$П$ – прибыль;
$С$ – себестоимость продукции.

Пусть, как и ранее, целевая установка следующая: увеличить рентабельность за счет повышения прибыли и снижения себестоимости. Такая целевая установка представляется следующим образом:

$$Р^{+} = \frac{П^{+}}{С^{-}}.$$

Введем коэффициент k и запишем:

$$П + \Delta П = kП,$$

$$C - \Delta C = \frac{C}{k}.$$

Подставив эти выражения в общую функцию, получим

$$P + \Delta P = \frac{kП}{\frac{C}{k}},$$

откуда

$$k = \sqrt{\frac{P + \Delta P}{P}}.$$

Проверка. $П = 24$; $C = 4$; $P = 6$; $\Delta P = 4$; $k = 1{,}29$;

$$P + \Delta P = \frac{30{,}96}{3{,}1} = 9{,}987 \approx 10.$$

25. Целевая установка: $y^{+} = f(x^{-}, z^{+})$.

Обратная задача имеет вид: $y + \Delta y = f(\frac{x}{k}, kz)$.

Пример (рис. 2.22). Если формула для прямого расчета

$$A = B - C,$$

а целевая установка отражена следующим образом:

$$A^{+} = B^{-} - C^{+},$$

то наша задача примет вид

$$A + \Delta A = \frac{B}{k} - kC.$$

В ней использованы следующие обозначения:

$$B - \Delta B = \frac{B}{k},$$

$$C + \Delta C = kC.$$

Решив уравнение относительно k, получим:

$$k = \frac{-(A + \Delta A) + \sqrt{(A + \Delta A)^2 + 4CB}}{2C}.$$

Проверка. $B = 80$; $C = 8$; $A = 12$; $\Delta A = 4$; $k = 1{,}04$; $A + \Delta A = 34{,}78 - 18{,}4 = 16{,}38 \approx 16$.

Если возникает потребность в поиске значений аргументов, обеспечивающих уменьшение функции, то здесь возможности данной модификации ограничены. В таких случаях следует обратиться к иным модификациям метода. Задача обратных вычислений с аддитивной функцией и с обоими отрицательными приростами аргументов может быть решена с помощью данного метода. Рассмотрим ее.

26. Целевая установка: $y^- = f(x^-, z^-)$.

Задача обратных вычислений имеет вид:

$$y - \Delta y = f\left(\frac{x}{k}, \frac{z}{k}\right).$$

Пример. Допустим, прямая формула расчета следующая:

$$A = B - C.$$

Если целевая установка

$$A^- = B^- - C^-,$$

то задача обратных вычислений запишется следующим образом:

$$A - \Delta A = \frac{B}{k} - \frac{C}{k}.$$

Решая ее, получим $k = \dfrac{A}{A - \Delta A}$.

Проверка. $A = 12$; $\Delta A = 4$; $B = 20$; $C = 8$; $k = 1{,}5$; $B - \Delta B = 13{,}33$; $C - \Delta C = 5{,}33$; $A - \Delta A = 13{,}33 - 5{,}33 = 8$.

Рассмотрим еще один пример с аддитивной функцией, но уже с тремя аргументами.

Допустим, необходимо снизить величину оборотного капитала *И* за счет снижения производственных запасов *З*, снижения незавершенного производства H и увеличения денежных средств C. Формула расчета

$$И = З + H + C,$$

которая в соответствии с целевой установкой приобретает вид:

$$И^- = З^- + H^- + C^+.$$

Введем искомый коэффициент и получим:

$$З - \Delta З = \frac{З}{k},\ H - \Delta H = \frac{H}{k},\ C + \Delta C = kC,\ И - \Delta И = \frac{З}{k} + \frac{H}{k} + kC,$$

$$Ck^2 - (И - \Delta И)k + (З + H) = 0.$$

Решив уравнение, получим

$$k = \frac{И - \Delta И + \sqrt{(И - \Delta И)^2 - 4C(З + H)}}{2C}.$$

Проверка (рис. 2.23). $И$ = 35; $\Delta И$ = 5; $З$ = 10; H = 20; C = 5; k = 4,73; $З - \Delta З$ = 2,11; $H - \Delta H$ = 4,22; $C + \Delta C$ = 23,66; И – $\Delta И$ = = 2,11 + 4,22 + 23,66 = 29,99 ≈ 30.

2.5. Решение задач с помощью процедуры свертки/развертки

Процедура свертки/развертки применяется для упрощения процесса решения задач обратных точечных вычислений, которые используют прямые функции с числом аргументов больше двух. Процедура свертки/развертки базируется на понятии элементарной базовой конструкции (ЭБК). Эта конструкция содержит в себе только три элемента, которые приведены к стандартному виду и два из которых соединены одной из четырех арифметических операций (+, –, *, /). Большинство экономических расчетов можно свести к ЭБК, что позволяет достаточно просто решить ряд задач. В качестве примеров ЭБК можно привести следующие выражения:

$$P^- = П^+(\alpha) - C^+(\beta); \quad D^- = K^+(\alpha) + T^-(\beta);$$

$$П^+ = A^+(\alpha) \cdot B^+(\beta); \quad P^+ = \frac{П^+(\alpha)}{C^-(\beta)}.$$

Процедура свертки уже рассмотрена в п. 1.2, поэтому остановимся на процедуре развертки.

Аддитивные функции

27. Целевая установка: $P^+ = \Pi^+(\alpha) + C^+(\beta) + T^+(\gamma) + O^+(\lambda)$.

Процесс свертки/развертки можно продемонстрировать с помощью рис. 2.24, на котором отражены следующие шаги процедуры свертки/развертки:

$$P^+ = \Pi^+(\alpha) + D^+(\sigma);\ D^+ = C^+ + T^+ + O^+;\ \sigma = \beta + \alpha + \lambda;$$

$$D^+ = C^+(\beta) + D1^+(\psi);\ D1^+ = T^+(\gamma) + O^+(\lambda);\ \psi = \gamma + \lambda.$$

Задачу будем решать с помощью индивидуальных коэффициентов прироста аргументов. Вначале отыскиваются приросты фиктивной вершины D и реальной Π обычным способом:

$$\Pi + \Delta\Pi = k_1\Pi,\ D + \Delta D = k_2 D,$$

$$k_1 = \frac{\alpha(P + \Delta P) + \sigma\Pi - \alpha D}{\Pi},\ k_2 = \frac{(P + \Delta P) - k_1\Pi}{D}.$$

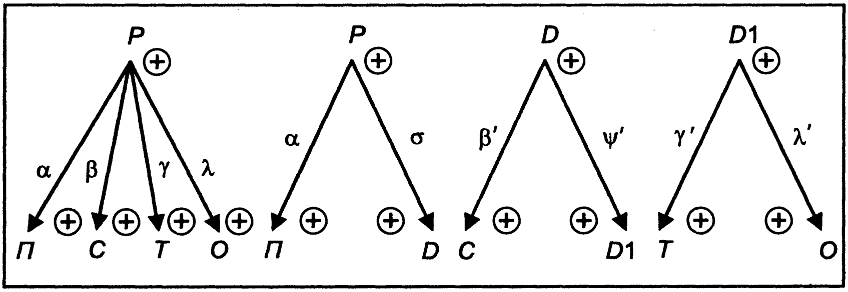


Рис. 2.24

Для того чтобы определить прирост фиктивной вершины $D1$, необходимо нормализовать веса β и ψ следующим образом:

$$\beta' = \frac{\beta}{\beta + \psi},\ \psi' = \frac{\psi}{\beta + \psi}.$$

Тогда получим приросты фиктивной вершины $D1$ и реальной C следующим образом:

$$C + \Delta C = k_3 C, \;\; D1 + \Delta D1 = k_1 D1,$$

$$k_3 = \frac{\beta'(D + \Delta D) + \psi' C - \beta' D1}{C}, \;\; k_4 = \frac{(D + \Delta D) - k_3 C}{D1}.$$

Для того чтобы рассчитать приросты аргументов T и D, предварительно следует нормализовать их веса:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma + \lambda}, \;\; \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}.$$

Приросты оставшихся аргументов:

$$T + \Delta T = k_5 T, \;\; O + \Delta O = k_6 O,$$

$$k_5 = \frac{\gamma'(D1 + \Delta D1) + \lambda' T - \gamma' O}{T}, \;\; k_6 = \frac{(D1 + \Delta D1) - k_5 T}{O}.$$

Пример (рис. 2.25). Оборотный капитал предприятия можно рассчитать по формуле

$$O = П + C + T,$$

где O – стоимость оборотного капитала в некотором периоде;
$П$ – стоимость производственных запасов;
C – стоимость незавершенного производства;
T – стоимость прочих элементов оборотного капитала (готовая продукция, денежные средства и пр.).

Допустим, необходимо повысить общую стоимость оборотного капитала за счет повышения стоимости всех его элементов. Такая целевая установка отразится следующим образом:

$$O^+ = П^+(\alpha) + C^+(\beta) + T^+(\gamma).$$

Свернем эту формулу:

$$C^+(\beta) + T^+(\gamma) = D^+(\sigma); \;\; \sigma = \beta + \lambda.$$

Тогда

$$O^+ = П^+(\alpha) + D^+(\sigma).$$

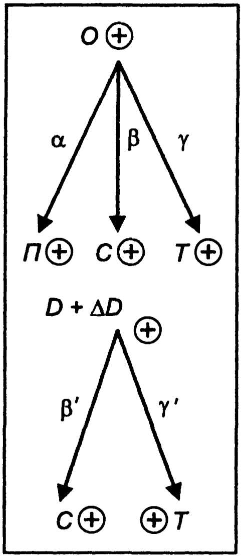


Рис. 2.25

Приросты для аргументов $П$ и D равны:

$$П + \Delta П = k_1 П;\;\; D + \Delta D = k_2 D.$$

Отсюда коэффициенты для расчета приростов:

$$k_1 = \frac{\alpha(O + \Delta O) + \sigma П - \alpha D}{П},$$

$$k_2 = \frac{(O + \Delta O) - k_1 П}{D}.$$

Приросты для аргументов C и T равны:

$$C + \Delta C = k_3 C, T + \Delta T = k_4 T,$$

$$\beta' = \frac{\beta}{\beta + \gamma},\;\; \gamma' = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}.$$

Тогда коэффициенты для расчета приростов:

$$k_3 = \frac{\beta'(D + \Delta D) + \gamma' C - \beta' T}{C},\;\; k_4 = \frac{(D + \Delta D) - k_3 C}{T}.$$

Проверка. $П = 60$; $C = 30$; $T = 10$; $O = 100$; $\Delta O = 40$; $\alpha = 0,6$; $\beta = 0,1$; $\gamma = 0,3$; $D = 40$; $\beta' = 0,25$; $\gamma' = 0,75$; $k_1 = 1,4$; $k_2 = 1,4$; $П + \Delta П = 1,4 \cdot 60 = 84$; $D + \Delta D = 1,4 \cdot 40 = 56$; $k_3 = 1,13$; $k_4 = 2,2$; $C + \Delta C = 1,13 \cdot 30 = 33,9$; $T + \Delta T = 2,2 \cdot 10 = 22$; $O + \Delta O = 84 + 33,9 + 22 = 139,9 \approx 140$.

Мультипликативные функции

28. Целевая установка: $\boldsymbol{P^+ = П^+(\alpha) \cdot C^+(\beta) \cdot T^+(\gamma) \cdot Ф^+(\lambda)}$.

Как и ранее, вначале эту функцию следует свернуть:

$$P^+ = П^+(\alpha) \cdot D^+(\sigma);\ \ D^+ = C^+(\beta) \cdot E^+(\psi);\ \ \sigma = \beta + \gamma + \lambda;$$

$$\psi = \gamma + \lambda;\ \ E^+ = T^+(\gamma) \cdot Ф^+(\lambda).$$

Приросты для аргументов $П$ и D равны:

$$П + \Delta П = k_1 П;\ \ D + \Delta D = k_2 D;\ \ k_1 = \frac{P + \Delta P}{k_2 P};$$

$$k_1 = \frac{-P(\sigma П - \alpha D) + \sqrt{(-P(\sigma П - \alpha D))^2 + 4\alpha\sigma P П D(P + \Delta P)}}{2\sigma D P}.$$

С целью определения приростов для C и E предварительно выполним для них нормализацию весов:

$$\beta' = \frac{\beta}{\beta + \psi};\ \ \psi' = \frac{\psi}{\beta + \psi}.$$

Тогда приросты:

$$C + \Delta C = k_3 C;\ \ E + \Delta E = k_4 E;\ \ k_3 = \frac{D + \Delta D}{k_4 D};$$

$$k_4 = \frac{-D(\psi' C - \beta' E) + \sqrt{(D(\psi' C - \beta' E))^2 + 4\beta'\psi' D \cdot C \cdot E(D + \Delta D)}}{2\psi' \cdot E \cdot D}.$$

Для определения приростов аргументов T и $Ф$ нормализуем для них веса:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma + \lambda};\ \ \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}.$$

Приросты соответственно будут:

$$T + \Delta T = k_5 T;\ \ \Phi + \Delta\Phi = k_6 \Phi;\ \ k_6 = \frac{E + \Delta E}{k_5 E},$$

$$k_5 = \frac{-E(\lambda' T - \gamma'\Phi) + \sqrt{(E(\lambda' T - \gamma'\Phi))^2 + 4\gamma'\lambda' ET\Phi(E + \Delta E)}}{2\lambda'\Phi E}.$$

Пример (рис. 2.26). Норматив P на незавершенное производство рассчитывается по формуле

$$P = \Pi \cdot C \cdot T,$$

где Π – однодневный расход материалов;
C – длительность производственного цикла (дни);
T – коэффициент нарастания затрат в незавершенном производстве.

Допустим, необходимо увеличить норматив за счет повышения всех составляющих формулы расчета. Это отразится следующим образом:

$$P^+ = \Pi^+(\alpha) \cdot C^+(\beta) \cdot T^+(\gamma).$$

Свернуть эту формулу можно следующим образом:

$$P^+ = \Pi^+(\alpha) \cdot D^+(\sigma),\ \sigma = \beta + \gamma,\ D^+ = C^+(\beta) + T^+(\gamma).$$

Приросты для Π и D равны:

$$\Pi + \Delta\Pi = k_1 \Pi;\ \ D + \Delta D = k_2 D;\ \ k_1 = \frac{P + \Delta P}{k_2 P},$$

$$k_2 = \frac{-P(\sigma\Pi - \alpha D) + \sqrt{(-P(\sigma\Pi - \alpha D))^2 + 4\alpha\sigma P\Pi D(P + \Delta P)}}{2\sigma DP}.$$

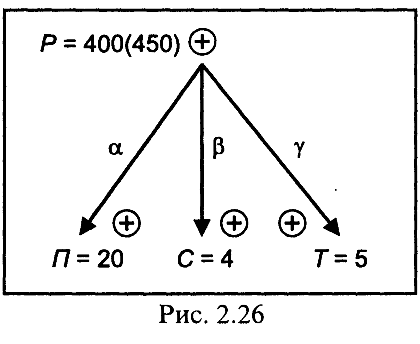


Рис. 2.26

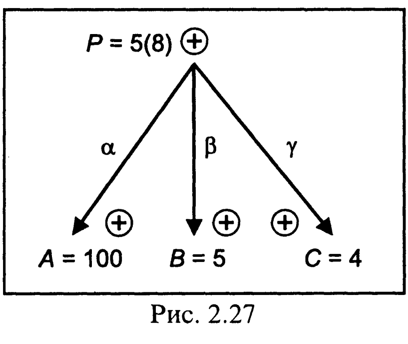


Рис. 2.27

Для определения приростов C и T предварительно следует нормировать веса аргументов:

$$\beta' = \frac{\beta}{\beta+\gamma}; \ \gamma' = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}.$$

Отсюда приросты равны:

$$C+\Delta C = k_3 C; \ T+\Delta T = k_4 T; \ k_3 = \frac{D+\Delta D}{k_4 D};$$

$$k_4 = \frac{-D(\gamma'C-\beta'E)+\sqrt{(-D(\gamma'C-\beta'T))^2+4\beta'\gamma'TDC(D+\Delta D)}}{2\beta'TD}.$$

Проверка. $P = 400$; $\Delta P = 50$; $\Pi = 20$; $C = 4$; $T = 5$; $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}3$; $\gamma = 0{,}1$; $D = 20$; $\beta' = 0{,}75$; $\gamma' = 0{,}25$; $\sigma = 0{,}4$; $k_1 = 1{,}072$; $k_2 = 1{,}049$; $\Pi + \Delta\Pi = 21{,}44$; $D + \Delta D = 20{,}98$; $k_3 = 1{,}045$; $k_4 = 1{,}0038$; $C + \Delta C = 4{,}18$; $T + \Delta T = 5{,}019$; $P + \Delta P = 21{,}44 \cdot 4{,}18 \cdot 5{,}019 = 449{,}798 \approx 450$.

Кратные функции

29. Целевая установка: $P^+ = \dfrac{A^+(\alpha)}{\dfrac{B^+(\beta)}{C^-(\gamma)}}$; $\alpha > \beta+\gamma$; $\gamma > \beta$.

Вначале свернем эту функцию следующим образом:

$$P^+ = \frac{A^+(\alpha)}{D^-(\sigma)}, \text{ где } D^- = \frac{B^+(\beta)}{C^-(\gamma)}; \ \sigma = \beta+\gamma.$$

Приросты для A и D равны:

$$A+\Delta A = k_1 A; \ D-\Delta D = \frac{D}{k_2}, \ k_2 = \frac{P+\Delta P}{k_1 P}, \ k_1 = \frac{\alpha+\sigma P}{\sigma P+\dfrac{\alpha P}{P+\Delta P}}.$$

Для того чтобы определить приросты B и C, необходимо нормализовать их веса:

$$\beta' = \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \ \gamma' = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}.$$

В связи с тем что приросты аргументов B и C определяются умножением, задача решается на основе функции:

$$D - \Delta D = B^{+}(\beta') \cdot C^{-}(\gamma').$$

Тогда приросты $B + \Delta B = k_3 B,\ C - \Delta C = \dfrac{C}{k_4}$ можно найти за счет:

$$k_3 = \frac{k_4(D - \Delta D)}{D},$$

$$k_4 = \frac{C\beta' + B\gamma' + \sqrt{(C\beta' + B\gamma')^2 - 4\gamma'\beta'(D - \Delta D)}}{2\gamma'\beta'(D - \Delta D)}.$$

Пример (рис. 2.27). $P = 5$; $\Delta P = 3$; $A = 100$; $B = 5$; $C = 4$; $D = 20$; $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}3$; $\gamma = 0{,}1$; $\beta' = 0{,}75$; $\gamma' = 0{,}25$; $k_1 = 1{,}095$; $k_2 = 1{,}46$; $A + \Delta A = 109{,}5$; $D - \Delta D = 13{,}7$; $k_3 = 1{,}3289$; $k_4 = 1{,}94$;

$B + \Delta B = 1{,}3289 \cdot 5 = 6{,}6445$; $C - \Delta C = \dfrac{4}{1{,}94} = 2{,}06$; $P + \Delta P = 109{,}5 :$ $: 6{,}6445 : 2{,}06 = 7{,}999 \approx 8$.

Смешанные функции

30. Целевая установка: $P^{+} = \Pi^{+}(\alpha) + A^{+}(\beta) \cdot C^{+}(\gamma)$.

Здесь одновременно имеем дело с аддитивной и мультипликативной функциями. Свернем смешанную функцию:

$$P^{+} = \Pi^{+}(\alpha) + D^{+}(\sigma),\ \text{где}\ \sigma = \beta + \gamma,\ D^{+} = A^{+}(\beta) \cdot C^{+}(\gamma).$$

Приросты для аргументов Π и D равны:

$$\Pi + \Delta\Pi = k_1 \Pi;\ D + \Delta D = k_2 D;$$

$$k_2 = \frac{(P + \Delta P) - k_1 \Pi}{D},\ k_1 = \frac{\alpha(P + \Delta P) + \sigma\Pi - \alpha D}{\Pi}.$$

Приросты для A и C определяются так:

$$A + \Delta A = k_3 \Pi;\ C + \Delta C = k_4 C;\ k_4 = \frac{D + \Delta D}{k_3 D},$$

$$k_3 = \frac{D(\gamma' A - \beta' C) + \sqrt{(D(\gamma' A - \beta' C))^2 + 4\beta'\gamma' DAC(D + \Delta D)}}{2\gamma' D\Pi}.$$

Пример. $P = 44$; $\Delta P = 10$; $\Pi = 20$; $A = 6$; $C = 4$; $D = 24$; $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}2$; $\gamma = 0{,}4$; $\beta' = 0{,}33$; $\gamma' = 0{,}66$; $k_1 = 1{,}2$; $k_2 = 1{,}25$; $\Pi + \Delta\Pi = 1{,}2 \cdot 20 = 24$; $D + \Delta D = 1{,}25 \cdot 24 = 30$; $k_3 = 1{,}059$; $k_4 = 1{,}179$; $A + \Delta A = 1{,}059 \cdot 6 = 6{,}3588$; $C + \Delta C = 1{,}179 \cdot 4 = 4{,}716$; $P + \Delta P = 24 + 6{,}3588 \cdot 4{,}716 = 53{,}988 \approx 54$.

2.6. Решение задач без процедуры свертки/развертки

Этот метод предполагает решение системы уравнений, число которых равно числу аргументов функции. Рассмотрим функцию с тремя аргументами.

31. Целевая установка: $y^+ = f(x^+(\alpha), z^+(\beta), p^-(\gamma))$.

Если для расчета приростов аргументов воспользоваться индивидуальными коэффициентами, то получим:

$$x + \Delta x = k_1 x,$$

$$z + \Delta z = k_2 z,$$

$$p + \Delta p = \frac{p}{k_3}.$$

Задача обратных вычислений запишется в виде:

$$\begin{cases} y + \Delta y = f(k_1 x, k_2 z, \dfrac{p}{k_3}), \\[2ex] \dfrac{k_1 x - x}{k_2 z - z + p - \dfrac{p}{k_3}} = \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}, \\[2ex] \dfrac{k_2 z - z}{k_1 x - x + p - \dfrac{p}{k_3}} = \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma}. \end{cases}$$

Ограничения на значения исходных данных устанавливаются из семантики индивидуальных коэффициентов:

$$k_1 \geq 1,$$
$$k_2 \geq 1,$$
$$k_3 \geq 1.$$

Пример. Вложения во внеоборотные активы $П$, как правило, состоят из приобретения объектов основных средств P, приобретения нематериальных активов O и приобретения земельных участков B. Формула расчета следующая:

$$П = P + O + B.$$

Допустим, целевая установка следующая: необходимо повысить общие вложения во внеоборотные активы за счет увеличения объектов основных средств, наращивания нематериальных активов и сокращения стоимости земельных участков. Все это отражается на формуле следующим образом:

$$П^{+} = P^{+}(\alpha) + O^{+}(\beta) + B^{-}(\gamma),$$

где α, β, γ – коэффициенты относительной важности целей, отражаемых аргументами P, O и B. Соответственно задачу будем решать с помощью индивидуальных коэффициентов:

$$P + \Delta P = k_1 P,$$
$$O + \Delta O = k_2 O,$$
$$B - \Delta B = \frac{B}{k_3}.$$

Запишем задачу обратных вычислений:

$$\begin{cases} П + \Delta П = k_1 P + k_2 O + \dfrac{B}{k_3}, \\ \dfrac{k_1 P - P}{k_2 O - O + B - \dfrac{B}{k_3}} = \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}, \\ \dfrac{k_2 O - O}{k_1 P - P + B - \dfrac{B}{k_3}} = \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma}. \end{cases}$$

Решив данную систему относительно k_1, k_2 и k_3, можно получить приросты для аргументов P, O и B.

2.7. Комплексный пример применения обратных вычислений в экономике

В качестве примера выберем предприятие, руководство которого озабочено низким уровнем рентабельности. При этом оно осознает пути повышения рентабельности и способно указать приоритеты в выборе этих путей.

Дерево целей (см. рис. 1.2), формулы для прямых расчетов и числовые значения исходных показателей рассматривались в разд. 1.1. На рис. 1.3 с помощью знаков плюс и минус показаны направления изменения аргументов. Приоритетность целей представлена в табл. 2.1. Для того чтобы расчетные формулы к рис. 1.3 можно было использовать для обратных вычислений, их необходимо снабдить целевыми установками. Приведем их.

$$1.\ P^+ = \frac{П^+(\alpha)}{Ф^+(\beta) + O^-(\gamma)}.$$

Для расчета P выполним свертку: $Д^-(\beta+\gamma) = Ф^+(\beta) + O^-(\gamma)$ и введем индивидуальные коэффициенты:

$$П + \Delta П = k_1 П,$$

$$Д - \Delta Д = \frac{Д}{k_2},$$

$$k_1 = \frac{\alpha + (\beta+\gamma)P}{(\beta+\gamma)P + \dfrac{\alpha P}{P + \Delta P}}, \quad k_2 = \frac{P + \Delta P}{k_1 P}.$$

Значения P, $П$, $Ф$ и O указаны на рис. 1.2, а коэффициенты приоритетности – на рис. 1.3 и в табл. 2.1.

Если $\alpha = 0{,}7$; $\beta + \gamma = 0{,}3$; $P = 0{,}22$; $\Delta P = 0{,}1$; $П = 510$; $Д = Ф + O = 2295$, то $k_1 = 1{,}4$; $k_2 = 1{,}04$; $П + \Delta П = 714$; $Д - \Delta Д = 2206{,}7$.

Таблица 2.1

Коэффициенты относительной важности аргументов

Показатель	Значения аргументов			
	α	β	γ	σ
Р	0,7	0,1	0,2	–
П	0,9	0,1	–	–
ПП	0,6	0,4	–	–
В	0,7	0,3	–	–
С	0,3	0,7	–	–
ПЕР	1,0	–	–	–
ПЕ	0,2	0,8	–	–
ПРП	0,5	0,3	0,2	–
НПР	0,4	0,4	0,2	–
ПОСТ	0,3	0,2	0,2	0,3
Ф	0,6	0,4	–	–
О	–	–	–	–
ПЗ	0,6	0,3	0,1	–
ДС	0,1	0,9	–	–

Проверка. $P+\Delta P=\dfrac{П+\Delta П}{Д-\Delta Д}\approx 0{,}32.$

Расчет для *Д*: $Д^{-}(\beta+\gamma)=Ф^{+}(\beta)+O^{-}(\gamma)$ при $\gamma>\beta$.

Здесь коэффициенты равны:

$$Ф+\Delta Ф=k_1 Ф,$$

$$O-\Delta O=\frac{O}{k_2},$$

$$k_1=\frac{\beta O+\gamma Ф-\dfrac{\beta O}{k_2}}{\gamma Ф},\quad k_2=\frac{O(\gamma+\beta)}{\gamma(Д-\Delta Д)-\beta O-\gamma Ф}.$$

Если $\beta=0{,}1$; $\gamma=0{,}2$; $Ф=2000$, $O=295$, то получим: $k_1=1{,}044$; $k_2=2{,}49$; $Ф+\Delta Ф=2088$; $O-\Delta O=120{,}4$.

Проверка. $Д-\Delta Д=2088+120{,}4=2208{,}4\approx 2206{,}7$.

$$2.\ П^{+}=ПП^{+}(\alpha)+ПД^{+}(\beta)-H_{\mathrm{const}}.$$

Здесь индивидуальные коэффициенты равны:

$$ПП + \Delta ПП = k_1 ПП,$$

$$ПД + \Delta ПД = k_2 ПД,$$

$$k_1 = \frac{П + \Delta П - k_2 ПД + Н}{ПП}, \; k_2 = \frac{П + \Delta П + Н - ПП + \frac{\alpha}{\beta} ПД}{ПД(\frac{\alpha}{\beta} + 1)}.$$

Если $\alpha = 0{,}9$; $\beta = 0{,}1$; $П = 714$; $ПП = 400$; $ПД = 120$; $Н = 10$, то получим: $k_1 = 1{,}46$; $k_2 = 1{,}17$; $ПП + \Delta ПП = 584$; $ПД + \Delta ПД = 140{,}4$.

Проверка. $П + \Delta П = 584 + 140{,}4 - 10 = 714{,}4 \approx 714$.

$$3.\; ПП^+ = В^+(\alpha) - С^-(\beta);$$

Индивидуальные коэффициенты равны:

$$В + \Delta В = k_1 В, \; С - \Delta С = \frac{С}{k_2},$$

$$k_1 = \frac{ПП + \Delta ПП + \frac{С}{k_2}}{В}, \; k_2 = \frac{С(\frac{\alpha}{\beta} + 1)}{\frac{\alpha}{\beta} С - ПП - \Delta ПП + В}.$$

Так как $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$; $В = 4000$; $С = 3600$, то получим: $k_1 = 1{,}03$; $k_2 = 1{,}02$; $В + \Delta В = 4080$; $С - \Delta С = 3495{,}12$.

Проверка. $ПП + \Delta ПП = 4080 - 3495{,}12 = 584{,}8$.

$$4.\; В^+ = К^+(\alpha) \cdot Ц^-(\beta).$$

Индивидуальные коэффициенты равны:

$$К + \Delta К = k_1 К,$$

$$Ц - \Delta Ц = \frac{Ц}{k_2},$$

$$k_1 = \frac{(В + \Delta В) k_2}{КЦ},$$

$$k_2 = \frac{\frac{\alpha}{\beta} Ц + К + \sqrt{(\frac{\alpha}{\beta} Ц + К)^2 - 4 \frac{a}{\beta}(КЦ + \Delta В)}}{2(К + \frac{\Delta В}{Ц})}.$$

Так как $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$; $К = 200$; $Ц = 20$, то получим: $k_1 = 1{,}545$; $k_2 = 1{,}5$; $К + \Delta К = 309$; $Ц - \Delta Ц = 13{,}3$.

Проверка. $В + \Delta В = 309 \cdot 13{,}3 = 4109{,}7 \approx 4080$.

$$5.\ C^{-} = ПЕР^{+}(\alpha) + ПОСТ^{-}(\beta).$$

Рассчитаем коэффициенты:

$$ПЕР + \Delta ПЕР = k_1 ПЕР,$$

$$ПОСТ - \Delta ПОСТ = \frac{ПОСТ}{k_2},$$

$$k_1 = \frac{\alpha ПОСТ - \alpha(C - \Delta C) + \beta ПЕР}{(\beta - \alpha) ПЕР},$$

$$k_2 = \frac{ПОСТ}{C - \Delta C - \dfrac{\alpha ПОСТ - \alpha(C - \Delta C) + \beta ПЕР}{(\beta - \alpha)}}.$$

Так как $ПЕР = 2100$; $ПОСТ = 1500$; $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}7$, то получим: $k_1 = 1{,}04$; $k_2 = 1{,}15$; $ПЕР + \Delta ПЕР = 2184$; $ПОСТ - \Delta ПОСТ = 1304{,}3$.

Проверка. $C - \Delta C = 2184 + 1304{,}3 = 3488{,}3 \approx 3495$.

$$6.\ ПЕР^{-} = К \cdot ПЕ^{+}(\alpha),\ \alpha = 1.$$

Здесь мы имеем функцию с одной переменной, которая обратима. Поэтому обратные вычисления не нужны. Прирост для одного аргумента равен:

$$ПЕР + \Delta ПЕР = (ПЕ + \Delta ПЕ)К,$$

$$ПЕ + \Delta ПЕ = \frac{ПЕР + \Delta ПЕР}{К} = \frac{2184}{13{,}3} = 164{,}2.$$

Результат: $ПЕ + \Delta ПЕ = 164{,}2$.

$$7.\ ПЕ^{+} = ПРП^{+}(\alpha) + НПР^{+}(\beta).$$

Здесь мы имеем аддитивную функцию, поэтому задачу можно решить путем пропорционального деления прироста функции. Так как $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 0{,}8$; $\Delta ПЕ = 59{,}4$, то получим:

$$ПРП + \Delta ПРП = ПРП + \alpha \Delta ПЕ = 60 + 0{,}2 \cdot 59{,}4 = 71{,}88;$$

$$НПР + \Delta НПР = НПР + \beta \Delta ПЕ = 45 + 0{,}8 \cdot 59{,}4 = 95{,}52.$$

Проверка. $ПЕ + \Delta ПЕ = 164 \approx 164{,}2$.

$$8.\ ПРП^{+} = ПМЗ^{+}(\alpha) + ПЗТ^{+}(\beta) + ПР1^{+}(\gamma).$$

Здесь так же, как и в формуле пункта 7 имеем аддитивную функцию, поэтому при $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}3$; $\gamma = 0{,}3$; $\Delta ПРП = 11{,}88$ получим:

$$ПМЗ + \Delta ПМЗ = ПМЗ + \alpha \cdot \Delta ПРП = 25{,}94;$$

$$ПЗТ + \Delta ПЗТ = ПЗТ + \beta \cdot \Delta ПРП = 33{,}56;$$

$$ПР1 + \Delta ПР1 = ПР1 + \gamma \cdot \Delta ПРП = 12{,}4.$$

Проверка. $ПРП + \Delta ПРП = 71{,}87.$

$$9.\ НПР^{+} = АУЦ^{+}(\alpha) + РЕМ^{+}(\beta) + ПР2^{+}(\gamma).$$

Здесь так же, как и в формулах пунктов 7 и 8, можно воспользоваться пропорциональным делением прироста функции. При $\alpha = 0{,}4$; $\beta = 0{,}4$; $\gamma = 0{,}2$; $\Delta НПР = 50{,}52$ получим:

$$АУЦ + \Delta АУЦ = АУЦ + \alpha \cdot \Delta НПР = 32{,}2;$$

$$РЕМ + \Delta РЕМ = РЕМ + \beta \cdot \Delta ПРП = 33{,}2;$$

$$ПР2 + \Delta ПР2 = ПР2 + \alpha \cdot \Delta ПРП = 30{,}1.$$

Проверка. $НПР + \Delta НПР = 95{,}5 \approx 95{,}52.$

$$10.\ ПОСТ^{-} = РУ^{-}(\alpha) + ОХ^{-}(\beta) + АП^{-}(\gamma) + ПРЗ^{-}(\sigma).$$

Для решения данной задачи следует воспользоваться процедурой свертки/развертки. Обозначим через $РУ + ОХ = A$ и $АП + ПРЗ = B$. Тогда имеем:

$$ПОСТ^{-} = A^{-}(\alpha + \beta) + B^{-}(\gamma + \sigma).$$

Введем индивидуальные коэффициенты:

$$A - \Delta A = \frac{A}{k_1},$$

$$B - \Delta B = \frac{B}{k_2},$$

$$k_1 = \frac{A}{(\gamma + \sigma)A - (\alpha + \beta)B + (\alpha + \beta)(ПОСТ - \Delta ПОСТ)},$$

$$k_2 = \frac{B}{ПОСТ - \Delta ПОСТ - \dfrac{A}{k_1}}.$$

Первый промежуточный результат: $k_1 = 1{,}12$; $k_2 = 1{,}18$; $A - \Delta A = 625$; $B - \Delta B = 677{,}96$.

$$A^- = РУ^-(\alpha') + ОХ^-(\beta');\ \ \alpha' = 0{,}6;\ \ \beta' = 0{,}4;$$

$$РУ - \Delta РУ = \frac{РУ}{k_1};$$

$$ОХ - \Delta ОХ = \frac{ОХ}{k_2};$$

$$k_1 = \frac{РУ}{\beta' РУ - \alpha' ОХ + \alpha'(A - \Delta A)};\ \ k_2 = \frac{ОХ}{A - \Delta A - \dfrac{РУ}{k_1}}.$$

При $РУ = 300$; $ОХ = 400$; $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}2$ получим: $k_1 = 1{,}18$, $k_2 = 1{,}08$; $РУ - \Delta РУ = 254{,}24$; $ОХ - \Delta ОХ = 370{,}4$.

Проверка. $A - \Delta A = 254{,}24 + 374{,}4 = 624{,}6 \approx 625$.

$$B^- = АП^-(\gamma') + ПР4^-(\sigma');\ \ \gamma' = 0{,}4;\ \sigma' = 0{,}6;$$

$$АП - \Delta АП = \frac{АП}{k_1};$$

$$ПР4 - \Delta ПР4 = \frac{ПР4}{k_2};$$

$$k_1 = \frac{АП}{\sigma' АП - \gamma' ПР4 + \gamma'(B - \Delta B)};$$

$$k_2 = \frac{ПР4}{B - \Delta B - \dfrac{АП}{k_1}}.$$

При $АП = 100$; $ПР4 = 700$; $\gamma = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}3$ получим следующее: $k_1 = 1{,}95$, $k_2 = 1{,}12$; $АП - \Delta АП = 51{,}28$; $ПР3 - \Delta ПР3 = 625$.

Проверка. $B - \Delta B = 51{,}28 + 625 = 676{,}28 \approx 677{,}9$.

$$11.\ Ф^{+} = АФ^{+}(\alpha) + ПФ^{-}(\beta).$$

Введем индивидуальные коэффициенты:

$$АФ + \Delta АФ = k_1 АФ;$$

$$ПФ - \Delta ПФ = \frac{ПФ}{k_2};$$

$$k_1 = \frac{\alpha ПФ - \alpha(Ф + \Delta Ф) + \beta АФ}{АФ(\beta - \alpha)};$$

$$k_2 = \frac{ПФ}{Ф + \Delta Ф - k_1 АФ}.$$

При $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$; $АФ = 900$; $ПФ = 1100$ получим: $k_1 = 1{,}29$, $k_2 = 1{,}19$; $АФ - \Delta АФ = 1161$; $ПФ - \Delta ПФ = 924{,}4$.

Проверка: $Ф + \Delta Ф = 1161 + 924{,}4 = 2085{,}4 \approx 2088$.

$$12.\ О^{-} = ПЗ^{-}(\alpha) + НЗ^{-}(\beta) + ГП^{-}(\gamma) + ДС^{-}(\lambda) + ПР4^{-}(\sigma).$$

Здесь функция имеет пять аргументов, что существенно затрудняет возможность установить приоритетность аргументов. Поэтому откажемся от весов важности целей и решим задачу без них:

$$О - \Delta О = \frac{ПЗ}{X} + \frac{НЗ}{X} + \frac{ГП}{X} + \frac{ДС}{X} + \frac{ПР4}{X}.$$

Отсюда получим:

$$X = \frac{О}{О - \Delta О} = 2{,}45.$$

Результат: $ПЗ - \Delta ПЗ = 57{,}14$; $НЗ - \Delta НЗ = 18{,}37$; $ГП - \Delta ГП = 22{,}45$; $ДС - \Delta ДС = 16{,}33$; $ПР4 - \Delta ПР4 = 6{,}12$.

Проверка. $О - \Delta О = 57{,}14 + 18{,}37 + 22{,}45 + 16{,}33 + 6{,}12 = 120{,}4$.

$$13.\ ПЗ^{-} = ТЗ^{-}(\alpha) + СЗ^{-}(\beta) + ПД4^{-}(\gamma).$$

Здесь можно применить единый коэффициент, согласно которому будут снижаться приросты:

$$\Delta ТЗ = \alpha \cdot k_0;\ \Delta СЗ = \beta \cdot k_0;\ \Delta ПД = \gamma \cdot k_0;$$

$$ПЗ - \Delta ПЗ = ТЗ - \alpha \cdot k_0 + СЗ - \beta \cdot k_0 + ПД4 - \gamma \cdot k_0.$$

Отсюда получим: $k_0 = \Delta ПЗ$.

При $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}3$; $\gamma = 0{,}1$; $\Delta ПЗ = 82{,}86$; $ТЗ = 100$; $СЗ = 25$; $ПД4 = 15$ получим: $\Delta ТЗ = 49{,}7$; $\Delta СЗ = 24{,}9$; $\Delta ПД4 = 8{,}28$.

Результат: $ТЗ - \Delta ТЗ = 50{,}3$; $СЗ - \Delta СЗ = 0{,}1$; $ПД4 - \Delta ПД4 = 6{,}72$.

Проверка. $ПЗ - \Delta ПЗ = 57{,}12 \approx 57{,}14$.

$$14.\ ДС^{-} = СС^{-}(\alpha) + ЗС^{-}(\beta).$$

$$СС + \Delta СС = \frac{СС}{k_1};$$

$$ЗС - \Delta ЗС = \frac{ЗС}{k_2};$$

$$k_1 = \frac{СС}{\beta СС - \alpha ЗС + \alpha(ДС - \Delta ДС)};$$

$$k_2 = \frac{ЗС}{ДС - \Delta ДС - \dfrac{СС}{k_1}}.$$

При $\alpha = 0{,}1$; $\beta = 0{,}9$; $СС = 15$; $ЗС = 25$ получим: $k_1 = 1{,}19$; $k_2 = 6{,}67$; $СС - \Delta СС = 12{,}6$; $ЗС - \Delta ЗС = 3{,}73$.

Проверка. $ДС - \Delta ДС = 16{,}33$.

Таблица 2.2

Результаты обратных вычислений с учетом имеющихся ресурсов, руб.

Показатель	Значение	
	предыдущее	новое
Объем выпуска продукции, шт.	200	309
Цена единицы продукции	20	13,3
Прямые материальные затраты	20	20,84
Прямые затраты на оплату труда	30	30,50
Прочие производственные затраты	10	10,34
Содержание аппарата управления цехом	12	13,34
Содержание и ремонт производственного оборудования	13	14,34
Прочие непроизводственные затраты	20	20,67

Продолжение

Показатель	Значение	
	предыдущее	новое
Затраты на оплату труда работников управления	300	254,24
Затраты на охрану	400	370,40
Арендная плата	100	51,28
Прочие постоянные затраты	700	625,00
Активная часть основных фондов	900	1161,00
Пассивная часть основных фондов	1100	924,40
Производственные запасы	140	57,14
Незавершенное производство	45	18,37
Готовая продукция	55	22,45
Денежные средства	40	16,33
Прочие элементы оборотного капитала	15	6,12
Текущий запас	100	50,30
Страховой запас	25	0,10
Подготовительный запас	15	6,72
Собственные денежные средства	15	12,60
Заемные средства	25	3,73

Если указать желаемый уровень рентабельности равным 0,32, то результаты расчетов будут такими, как это показано в табл. 2.2. Она может служить основой для разработки планов мероприятий, необходимых для функционирования различных структурных подразделений, ответственных за достижение того или иного показателя.

Очевидно, изменение показателей наталкивается на ограничения, ибо ресурсы предприятия всегда конечны. Поэтому необходим алгоритм, с помощью которого можно определить прирост одного показателя за счет другого. Как этого можно достичь, будет показано в гл. 6.

Глава 3

ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

3.1. Дерево вероятностей

Существует большое число задач, где зависимости между переменными носят вероятностный характер. Среди таких задач достаточно актуальными являются:

- управление рисками – определение условий (мероприятий, состава объектов, параметров, характеристик и т.д.), гарантирующих снижение финансовых, инвестиционных, банковских, информационных и других рисков до желаемого уровня;
- управление безопасностью – определение условий или мероприятий, выполнение которых обеспечит установленный уровень информационной, экономической, технической, экологической, военной, социальной и др. безопасности;
- управление надежностью – определение условий, гарантирующих установленный уровень надежности системы (информационной, экономической, технологической).

Решение перечисленных задач предполагает наличие у лица, принимающего решение, соответствующего аппарата, способного ответить на вопрос: «Что делать?». Например, лицу, формирующему решение, необходимо знать ответ на вопрос: «Каковы должны быть условия для того, чтобы уровень инвестиционного риска снизился с 0,6 до 0,2?». Чтобы система могла выдавать ответы на такого рода вопросы, необходимо поставить и решить обратную по отношению к прямой задачу, которая может, например, формироваться следующим образом: «От каких факторов зависит инвестиционный риск и как он определяется?».

Так же, как и в детерминированных задачах, одни вероятностные события зависят от других событий, которые, в свою очередь, могут носить как детерминированный, так и стохастических характер. Поэтому в общем случае следует рассматривать зависимости и того, и другого характера совместно. Проблема решения обратных задач на основе обратных вычислений, сочетающих в себе детерминированные и вероятностные задачи, еще ждет своего решения. Пока мы остановимся лишь на методах решения обратных вероятностных задач.

Вероятностные зависимости одних событий от других будем представлять с помощью графа, который, как правило, вырождается в дерево. Далее такое дерево будет называться *деревом вероятностей*. В узлах дерева будут находиться вероятности наступления тех или иных событий, а дуги будут символизировать связи между событиями. Все узлы будут делиться на две группы: расчетные и терминальные. Значения вероятностей событий, находящихся в терминальных узлах, либо заданы, либо определяются правилами, находящимися вне обратных вычислений. *Расчетные узлы* – это результат обратных вычислений. *Корень дерева* – это узел, где указывается значение вероятности, заданное лицом, формирующим решение (желаемый уровень риска, надежности, безопасности и т.п.).

На рис 3.1 представлено дерево, иллюстрирующее в общем виде прямые и обратные вероятностные вычисления.

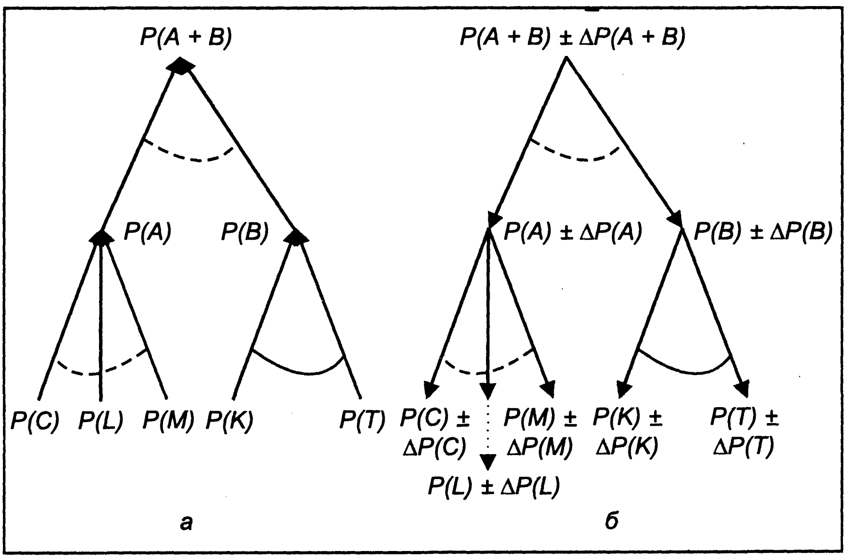


Рис. 3.1

Направленность дуг указывает на различие используемой исходной информации. Дуги, направленные вверх, указывают на прямые вероятностные вычисления. Для них в качестве исходной информации выступают вероятности терминальных узлов дерева. Если же дуги направлены вниз, то мы имеем дело с обратными вычислениями, для которых часть исходной информации находится в корне дерева.

Кроме того, линии на рис. 3.1, которые связывают события, являются либо пунктирными, либо сплошными дугами: пунктирная символизирует операцию сложения вероятностей, сплошная – операцию умножения.

На рис. 3.1,*б* к вероятности наступления событий A или B ($P(A + B)$) добавлен прирост $\Delta P(A + B)$, который совместно с дополнительными данными служит исходной информацией для расчета приростов всех оставшихся узлов дерева. Буквами греческого алфавита (α, β, γ,…) обозначены коэффициенты приоритетности наступления тех или иных событий, а с помощью знаков плюс или минус – направления приростов этих изменений. Например, $P(A) + \Delta P(A)$ указывает на рост вероятности $P(A)$ на величину $\Delta P(A)$, а $P(B) - \Delta P(B)$ отражает уменьшение вероятности $P(B)$ на величину $\Delta P(B)$.

Большинство модификаций метода обратных вычислений, рассмотренных в гл. 2, применимы и для решения вероятностных задач. Рассмотрим две модификации:

- решение задач обратных вычислений без коэффициентов прироста аргументов;
- то же без указания приоритетов целей.

Задачу обратных вероятностных вычислений в общем виде можно сформулировать следующим образом:

известны: вероятность наступления событий A, B, C, …;

формулы, по которым вычисляются вероятности наступления событий A, B, C,…;

желаемый прирост вероятности наступления события, отражаемого в корне дерева вероятностей;

желаемые направления приростов изменении вероятностей в узлах дерева;

приоритетность в изменении наступления событий;

определить: новые значения вероятностей наступления событий, отражаемых терминальными узлами дерева;

соотношение условий, обеспечивающих новые значения вероятностей в терминальных вершинах.

Далее рассмотрим формальные постановки обратных вероятностных задач и их решения с помощью обратных вычислений для следующих классов вероятностей:

- Безусловная вероятность наступления одного из несовместных событий.
- Безусловная вероятность наступления одного из совместных событий.
- Условная вероятность совместного наступления событий.
- Условная вероятность совместного наступления независимых событий.
- Вероятность наступления события совместно с одним из ряда несовместных событий (полная вероятность).
- Вероятность, характеризуемая функцией или плотностью распределения.
- Вероятность появления события в некоторой серии испытаний (формула Бернулли).

Рассмотрим постановки задач в двух вариантах, а также примеры их решения. В стремлении к простоте изложения в примерах участвуют лишь два события (A и B).

3.2. Поиск безусловной вероятности наступления одного из несовместных событий

3.2.1. Решение задачи без коэффициентов прироста

Как известно, вероятность наступления в некотором испытании какого-либо одного из событий A, B, C,... равна сумме вероятностей событий, если любые два из них несовместны. Расчет ведется по формуле

$$P(A+B+C+...)=P(A)+P(B)+P(C)+... .$$

Дальнейшее чтение материала предполагает предварительное ознакомление с разд. 2.3.

В общем виде задача обратных вычислений, если рассматриваются два события, решается с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} P(A+B) \pm \Delta P(A+B) = P(A) \pm \Delta P(A) + P(B) \pm \Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta}, \end{cases}$$

где $P(A + B)$ – вероятность наступления одного из независимых событий A или B;

$\pm \Delta P(A + B)$ – желаемый прирост вероятности наступления одного из независимых событий A или B;

$P(A)$, $P(B)$ – вероятности наступления событий A и B соответственно;

$\pm \Delta P(A)$, $\pm \Delta P(B)$ – приросты вероятностей наступления независимых событий A и B соответственно;

α, β – коэффициенты приоритетности в наступлении событий A и B соответственно.

1. Целевая установка: $\boldsymbol{P(A+B)^{+} = P(A(\alpha))^{+} + P(B(\beta))^{+}}$.

Задача обратных вероятностных вычислений принимает вид:

$$\begin{cases} P(A+B) + \Delta P(A+B) = P(A) + \Delta P(A) + P(B) + \Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Как и ранее, $\alpha + \beta = 1$.

Полученные в результате решения новые вероятности наступления событий A и B позволяют определить новые условия, от которых они зависят. Если через X_1 обозначить новые условия для свершения события A, а через X_2 – для события B, то мы приходим к двум уравнениям:

$$P(A) + \Delta P(A) = \frac{X_1}{n};$$

$$P(B) + \Delta P(B) = \frac{X_2}{n},$$

где n – общие условия наступления событий A и B.

Ответ будет следующим:

$$X_1 = n(P(A) \pm \Delta P(A));$$
$$X_2 = n(P(B) \pm \Delta P(B)).$$

Пример (рис. 3.2). Рассматривается урна, в которой находятся три красных шара, четыре белых и четыре черных. Вероятность того, что при одном извлечении будет вынут либо красный, либо белый шар без труда можно определить по формуле безусловной вероятности. Обозначив через A событие извлечения красного шара, а через B – белого, получим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11} = 0,63.$$

На рис. 3.2, *а* графически представлено прямое вычисление вероятностей наступления двух независимых событий A или B, а на рис. 3.2, *б* – обратные вероятностные вычисления с одинаковой направленностью в изменении аргументов.

Пунктирная дуга, соединяющая дуги графа, указывает на то, что речь идет о появлении либо события A, либо события B.

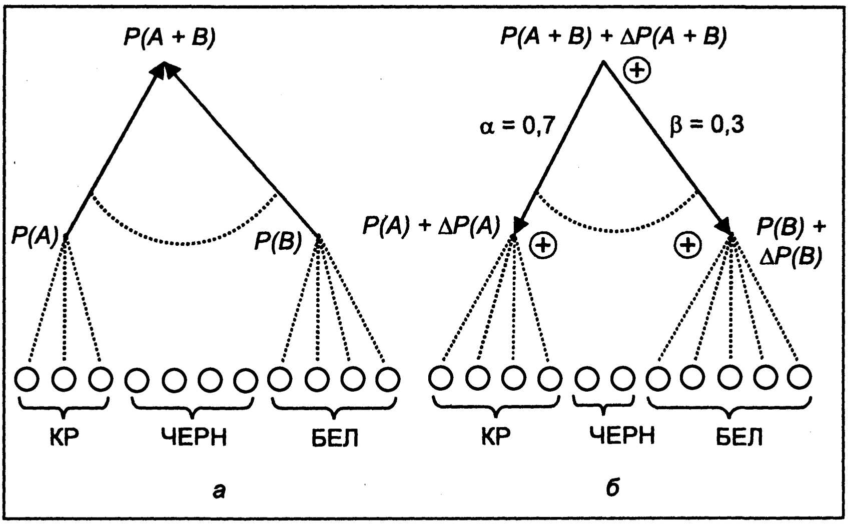


Рис. 3.2

Допустим, необходимо увеличить вероятность наступления событий A или B до 0,8. На рис. 3.2, *б* показаны в окружностях знаки плюс, означающие, что как вероятность ($P(A)+\Delta P(A)$) наступления события A, так и вероятность ($P(B)+\Delta P(B)$) наступления события B должны увеличиваться. Достижение цели, заключающейся в повышении вероятности наступления независимых событий A и B, должно в большей части происходить за счет повышения вероятности наступления события A. Это отражает коэффициент приоритетности $\alpha = 0,7$. В меньшей мере нагрузка ложится на второе событие B. Коэффициент приоритетности его наступления равен 0,3.

Для решения сформулированной задачи обратных вычислений запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)+\Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Так как желаемое значение вероятности наступления событий A или B известно из условия задачи ($P(A + B) + \Delta P(A + B) =$ $= 0,8$), а существующая вероятность равна 0,63, то, подставив эти значения в приведенную систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 0,17=\Delta P(A)+\Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{0,7}{0,3}. \end{cases}$$

Решая эту систему, имеем:

$$\Delta P(A)=0,11,$$
$$\Delta P(B)=0,05.$$

Таким образом, новые значения вероятностей наступления событий A или B равны:

$$P(A)+\Delta P(A)=0,27+0,11=0,38;$$
$$P(B)+\Delta P(B)=0,36+0,05=0,41.$$

Для того чтобы обеспечить новые условия для наступления событий A или B, решим следующие уравнения:

$$P(A)+\Delta P(A)=\frac{X_1}{n};$$

$$P(B)+\Delta P(B)=\frac{X_2}{n},$$

где X_1, X_2 – число красных и белых шаров, обеспечивающих новую вероятность наступление событий A или B, являющихся независимыми.

Число это следующее: $X_1 \approx 4$; $X_2 \approx 5$.

Так как общее число шаров должно быть равно 11, уменьшим число черных на 2. Тогда новое соотношение красных, белых и черных шаров будет следующим: 4, 5, 2.

Проверка. $P(A+B)+\Delta P(A+B)=\frac{4}{11}+\frac{5}{11}=\frac{9}{11}=0{,}8.$

На рис. 3.2, *б* результаты расчетов представлены новым числом шаров: число красных увеличилось до 4, белых – до 5, а черных – сократилось до 2.

2. Целевая установка: $P(A+B)^{+}=P(A(\alpha))^{+}+P(B(\beta))^{-}$.

Такая целевая установка ориентирует на то, что достичь желаемого результата следует не за счет одновременного увеличения вероятностей наступления событий A и B, а за счет увеличения одной вероятности и уменьшения другой.

Как и ранее, вначале запишем систему уравнений в общем виде, обращая внимание на то, что в соответствии с постановкой задачи прирост вероятности наступления события B имеет отрицательный знак:

$$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)-\Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

П р и м е р (рис. 3.3). Обратимся к предыдущей целевой установке. Пусть, как и ранее, необходимо увеличить вероятность наступления событий A или B до 0,8 с коэффициентами приоритетности для события A, равного 0,7, и для события B, равного 0,3. Однако добиться увеличения общей вероятности необходимо за счет увеличения вероятности наступления события A и уменьшения события B. На рис. 3.3, *б* представлена задача обратных вероятностных вычислений с различной направленностью в изменении аргументов.

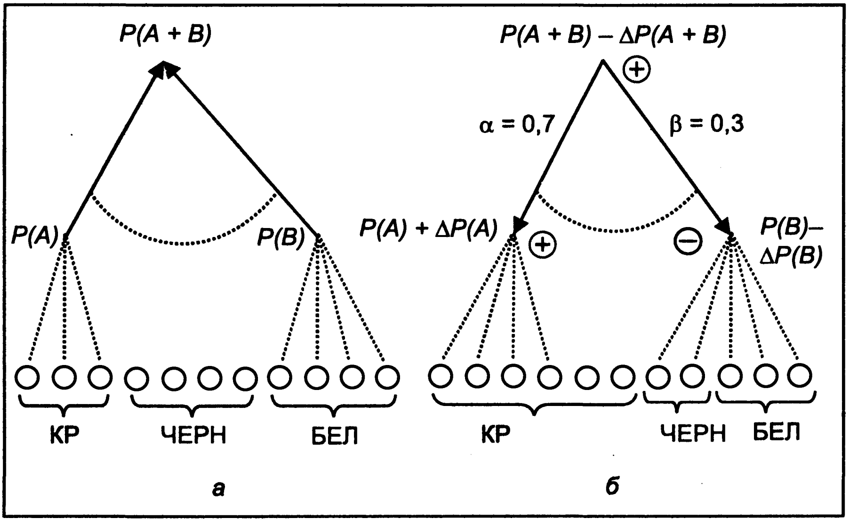


Рис. 3.3

Так как старое и новое (желаемое) значения вероятности наступления событий A или B известны, система уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} 0{,}17 = \Delta P(A) - \Delta P(B)), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{0{,}7}{0{,}3}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\Delta P(A) = 0{,}3;$$
$$\Delta P(B) = 0{,}13.$$

Новые значения вероятностей наступления событий A или B следующие:

$$P(A) + \Delta P(A) = 0{,}27 + 0{,}3 = 0{,}57;$$
$$P(B) - \Delta P(B) = 0{,}36 - 0{,}13 = 0{,}23.$$

Для того чтобы узнать, какое соотношение шаров может обеспечить такие вероятности, составим уравнения:

$$P(A) + \Delta P(A) = \frac{X_1}{n};$$

$$P(B) - \Delta P(B) = \frac{X_2}{n},$$

где, как и ранее, X_1, X_2 – новое число красных и белых шаров.

Соответственно

$$X_1 \approx 6;\ X_2 \approx 3.$$

В связи с тем что общее число шаров не изменилось, число черных шаров сокращается до двух. Проверка указывает на правильность вычислений:

$$P(A+B) + \Delta P(A+B) = \frac{6}{11} + \frac{3}{11} = \frac{9}{11} = 0{,}8.$$

На рис. 3.3, *б* результат вычислений представлен в виде измененного числа шаров красного и белого цветов.

3. Целевая установка: $P(A+B)^{-} = P(A(\alpha))^{+} + P(B(\beta))^{-}$.

Такая целевая установка ориентирует на определение соотношения шаров, обеспечивающего снижение вероятностей наступления событий *A* или *B*, причем вероятность события *A* должна увеличиться, а вторая, т.е. вероятность наступления события B, должна снизиться. Остальные данные те же, что и в предыдущей задаче.

На рис. 3.4, *б* представлена графическая интерпретация обратных вероятностных вычислений, предназначенных для уменьшения вероятностей наступления событий *A* или *B*.

Запишем нужную систему уравнений, имея в виду задачу уменьшения вероятностей появления событий *A* или *B*:

$$\begin{cases} P(A+B) - \Delta P(A+B) = P(A) + \Delta P(A) + P(B) - \Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

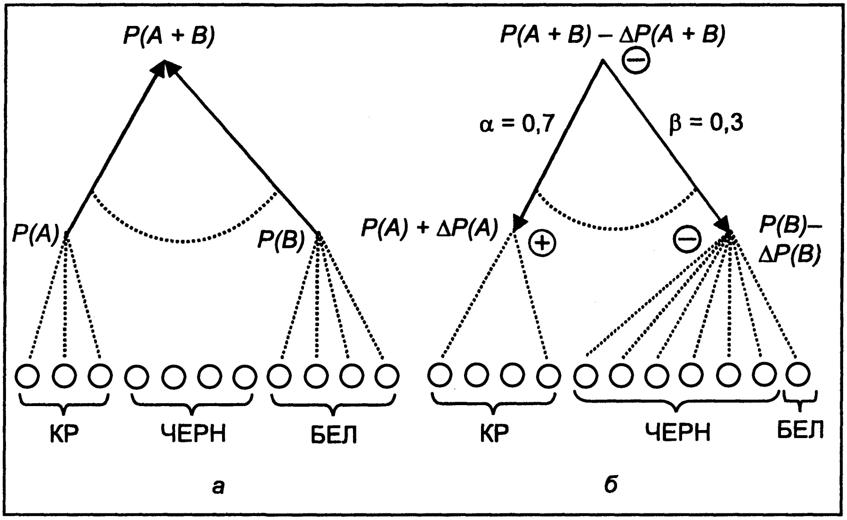


Рис. 3.4

Пример. Допустим, новое желаемое значение суммы вероятностей равно 0,5, существующее же равно 0,64; если коэффициенты α и β равны 0,3 и 0,7 соответственно, то система примет вид:

$$\begin{cases} 0,17 = \Delta P(B) - \Delta P(A), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{0,7}{0,3}. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\Delta P(A) = 0,18;$$
$$\Delta P(B) = 0,42.$$

Новые значения вероятностей наступления событий A или B равны:

$$P(A) + \Delta P(A) = 0,27 + 0,11 = 0,38;$$
$$P(B) - \Delta P(B) = 0,36 - 0,26 = 0,1.$$

Новые вероятности обеспечиваются следующим соотношением шаров:

$$P(A)+\Delta P(A)=\frac{X_1}{n};$$

$$P(B)-\Delta P(B)=\frac{X_2}{n},$$

где, как и ранее, X_1, X_2 – новое число красных и белых шаров соответственно.

Число красных шаров должно быть равно $X_1 \approx 4$, а белых – $X_2 \approx 1$ (рис. 3.4, *б*).

Так как общее число шаров равно 11, черных шаров будет 6.

Проверка. $P(A+B)-\Delta P(A+B)=\frac{4}{11}+\frac{1}{11}=\frac{5}{11}=0{,}45$, что на 0,05 меньше желаемого значения. Такая погрешность вполне приемлема.

Здесь следует отметить, что на исходные данные существуют ограничения. В данной задаче для того, чтобы не получить отрицательные вероятности, накладывается ограничение вида $\alpha < \beta$. Кроме того, желаемый прирост для $\Delta P(B)$ должен быть таким, чтобы разность $P(B) - \Delta P(B)$ не получилась отрицательной.

3.2.2. Решение задач без указания приоритетности целей

В данном разделе используются сведения из разд. 2.4.

4. Целевая установка: $P(A+B)^+ = P(A)^+ + P(B)^+$.

Задача обратных вероятностных вычислений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} P(A+B)\pm\Delta P(A+B)=P(A)\pm\Delta P(A)+P(B)\pm\Delta P(B), \\ \Delta P(A)=k\cdot P(A), \\ \Delta P(B)=k\cdot P(B), \end{cases}$$

где k – коэффициент, позволяющий определить искомые приросты вероятностей.

Остальные обозначения прежние.

Пример. Воспользуемся целевой установкой 1. Отличие состоит в том, что информация о приоритетах направлений достижения цели отсутствует. Это значит, что коэффициенты α и β либо неизвестны, либо несущественны.

Допустим, у лица, формирующего решение, в качестве цели фигурирует стремление к увеличению вероятности наступления события A или B до 0,8. Графическая интерпретация задачи та же, что и на рис. 3.2, за исключением того, что коэффициенты α и β отсутствуют.

Так как желаемое значение $P(A + B) + \Delta P(A + B)$ известно и равно 0,8 и известны также значения: $P(A) + P(B) = 0{,}63$; $P(A) = 0{,}27$ и $P(B) = 0{,}36$, система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} 0{,}17 = \Delta P(A) + \Delta P(B), \\ \Delta P(A) = k \cdot 0{,}27, \\ \Delta P(B) = k \cdot 0{,}36. \end{cases}$$

Решив ее относительно k, получим $k = 0{,}27$.

Новые значения вероятностей событий A и B равны:

$$P(A) + \Delta P(A) = 0{,}27 + 0{,}27 \cdot 0{,}27 = 0{,}34;$$
$$P(B) + \Delta P(B) = 0{,}36 + 0{,}27 \cdot 0{,}36 = 0{,}46;$$

Новое соотношение шаров следующее:

$$P(A) + \Delta P(A) = \frac{X_1}{11},$$
$$P(B) + \Delta P(B) = \frac{X_2}{11},$$
$$X_1 \approx 4;\ X_2 \approx 5.$$

Таким образом, мы получили тот же ответ, что и в целевой установке 1. Произошло это из-за довольно сильного огрубления результатов расчета, так как число шаров должно быть целым. При других постановках результаты, как правило, отличаются.

5. Целевая установка: $\boldsymbol{P(A+B)^{+} = P(A)^{+} + P(B)^{-}}$.

При такой целевой установке обратная задача обратных вычислений запишется следующим образом:

$$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)-\Delta P(B), \\ \Delta P(A)=k\cdot P(A), \\ \Delta P(B)=k\cdot P(B). \end{cases}$$

П р и м е р. Теперь рассмотрим, каковы будут результаты, если одна из вероятностей, например наступления события А, должна увеличиться, а другая – уменьшиться. При этом сумма этих вероятностей, т.е. вероятность наступления события A или B, должна увеличиться и достичь величины 0,7. Вероятность наступления события A равна 0,36, а события B – 0,27.

Подставив эти данные в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 0,07=\Delta P(A)-\Delta P(B), \\ \Delta P(A)=k\cdot 0,36, \\ \Delta P(B)=k\cdot 0,27. \end{cases}$$

Решив систему относительно k, получим k = 0,78. Приросты равны:

$$P(A)+\Delta P(A)=0,36+0,36\cdot 0,78=0,64,$$
$$P(B)-\Delta P(B)=0,27-0,27\cdot 0,78=0,06.$$

Теперь определим новое соотношение шаров:

$$P(A)+\Delta P(A)=\frac{X_1}{11},$$
$$P(B)-\Delta P(B)=\frac{X_2}{11},$$
$$X_1\approx 7;\ X_2\approx 1.$$

Таким образом, красных шаров 7, белых – 1, а черных – 3 (разность 11 – 8).

Проверка. $P(A+B)+\Delta P(A+B)=\frac{7}{11}+\frac{1}{11}=\frac{8}{11}=0,7.$

Здесь, как и ранее, необходим предварительный анализ исходных данных, так как существует возможность получения бессмысленных результатов. Прежде всего это касается вероятности наступления события A, которая должна быть больше вероятности наступления события B. Это требование вытекает из определения вероятности, которая не может быть меньше нуля.

Кроме того, желаемое значение $\Delta P(A)$ не может превышать определенного уровня, что также может привести к отрицательным значениям вероятностей.

3.3. Поиск безусловной вероятности наступления одного из совместных событий

3.3.1. Решение задачи без коэффициентов прироста

Известно, что вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

С практической точки зрения приведенная формула для вычисления безусловной вероятности наступления совместных событий для событий, число которых больше двух, неудобна. Поэтому можно воспользоваться иной формулой:

$$P(A+B)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}),$$

где $\overline{A}$, $\overline{B}$ – события, противоположные событиям A и B.

Тогда формула для обратных вычислений примет вид:

$$P(A+B)\pm\Delta P(A+B)=1-(P(\overline{A})\pm\Delta P(\overline{A}))(P(\overline{B})\pm\Delta P(\overline{B}).$$

Здесь следует обратить внимание на то, что приросты вероятностей противоположных событий поменяли знаки:

$$\mp\Delta P(\overline{A}),\ \mp\Delta P(\overline{B}).$$

Пример. Прямые расчеты приведем из [8], а затем выполним обратные вычисления: производится два выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого выстрела равна 0,6, для второго – 0,7. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Пусть A – событие, при котором будет попадание при первом выстреле, B – попадание при втором, т.е. $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}7$.

События A и B независимые, но совместные. Тогда вероятность попадания при первом или втором выстреле равна:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0,6+0,7-0,6\cdot 0,7=0,88,$$

или

$$P(+B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-0,4\cdot 0,3=0,88.$$

В общем виде задача поиска безусловной вероятности наступления одного из совместных событий записывается в виде:

$$\begin{cases} P(A+B)\pm\Delta P(A+B)= \\ =P(A)\pm\Delta P(A)+P(B)\pm \\ \pm\Delta P(B)-(P(A)\pm\Delta P(A))(P(B)\pm\Delta P(B)), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

6. Целевая установка:

$$\boldsymbol{P(A+B)^{+}=P(A(\alpha))^{+}+P(B(\beta))^{+}-P(A(\alpha))^{+}P(B(\beta))^{+}}.$$

Такая целевая установка в виде задачи обратных вычислений отразится следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)= \\ =P(A)+\Delta P(A)+P(B)+ \\ +\Delta P(B)-(P(A)+\Delta P(A))(P(B)+\Delta P(B)), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Обозначения прежние.

Пример (рис. 3.5). Продолжим рассмотрение предыдущего примера, но уже будем решать противоположную задачу. Допустим, что требуется узнать, какие должны быть вероятности $P(A)$ и $P(B)$, позволяющие увеличить вероятность $P(A + B)$ с 0,88 до 0,92. При этом часть прироста вероятности $P(A + B)$ должна происходить за счет увеличения вероятности $P(A)$ пропорционально коэффициенту $\alpha = 0{,}7$, а увеличения вероятности $P(B)$ – пропорционально коэффициенту $\beta = 0{,}3$.

Графическая интерпретация решения задачи поиска безусловной вероятности наступления совместных, но независимых событий представлена на рис. 3.5,*б*.

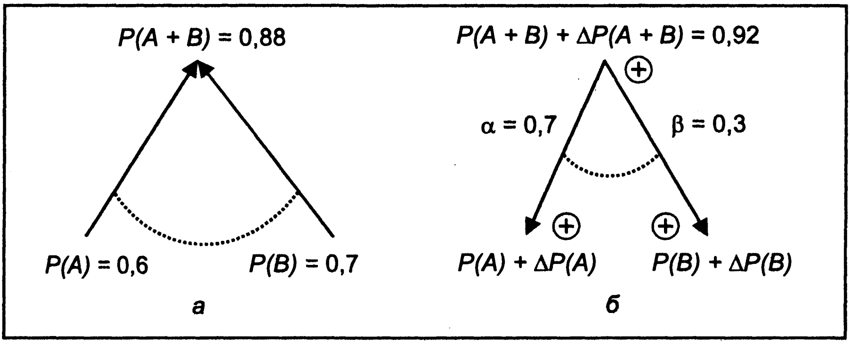


Рис. 3.5

Подставив исходные данные в систему уравнений общего вида, получим:

$$\begin{cases} 0,04 = 0,3\Delta P(A) - 0,4\Delta P(B) - \Delta P(A)\Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив его относительно $\Delta P(A)$ и $\Delta P(B)$, получим:

$$\Delta P(B) = \frac{0,4\beta + 0,3\alpha - \sqrt{(0,4\beta + 0,3\alpha)^2 - 4\alpha\beta \cdot 0,04}}{2\alpha},$$

$$\Delta P(A) = \frac{\alpha}{\beta}\Delta P(B),$$

$$\Delta P(A) = 0,1;\ \Delta P(B) = 0,043.$$

Проверка. $\Delta P(A) = 0,1$; $\Delta P(B) = 0,043$; $P(A) + \Delta P(A) = 0,7$; $P(B) + \Delta P(B) = 0,743$; $P(A + B) + \Delta P(A + B) = 0,7 + 0,743 - 0,7 \cdot 0,743 = 0,924 \approx 0,92$.

Пример. Вначале рассмотрим прямую задачу. Токарь обслуживает два станка, работающих независимо один от другого. Вероятность того, что первый станок в течение часа не потребует внимания токаря, равна 0,6, а второго станка – 0,5. Какова вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок не потребует внимания токаря?

Обозначим через A событие, выражающее искомую вероятность, а через A_1 и A_2 события, заключающиеся в том, что оба станка в течение часа не потребуют внимания токаря. Все события независимы, но совместны. Их вероятности равны $P(A) = 0,6$ и $P(B) = 0,5$. С учетом принятых обозначений имеем:

$$A = A_1 + A_2,$$
$$P(A) = P(A_1 + A_2).$$

Для прямых вычислений воспользуемся противоположными событиями, которые формулируются следующим образом: ни одни станок не проработает без вмешательства токаря. Тогда

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2,$$
$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,6 = 0,4,$$
$$P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Из независимости событий A_1 и A_2 следует независимость противоположных им событий $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$. Согласно правилу умножения вероятностей независимых событий имеем:

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2.$$

Отсюда вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок не потребует внимания токаря, равна:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Теперь рассмотрим противоположную задачу. Допустим, необходимо узнать условия, при которых вероятность того, что хотя бы один станок не потребует внимания токаря, повысится до 0,92. При этом приоритетность наступления событий остается прежней: для A она равна 0,7, а для B – 0,3. Согласно рассматриваемой целевой установке запишем систему уравнений, предварительно подставив и преобразовав исходные данные:

$$\begin{cases} 0,12 = 0,5\Delta P(A) + 0,4\Delta P(B) - \Delta P(A) \cdot \Delta P(B), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{0,7}{0,3}. \end{cases}$$

Отсюда искомые приросты: $\Delta P(B) = 0{,}088$; $\Delta P(A) = 0{,}21$; $P(B) + \Delta P(B) = 0{,}588$; $P(A) + \Delta P(A) = 0{,}8$; $P(A + \mathrm{B}) + \Delta P(A + B) = 0{,}588 + 0{,}8 - 0{,}588 \cdot 0{,}8 = 0{,}918 \approx 0{,}92$.

В результате получен следующий ответ: для того чтобы вероятность того, что хотя бы один станок не потребует внимания токаря, повысилась до 0,92, необходимо повысить вероятность $P(A)$ до 0,81, а $P(B)$ – до 0,588.

Здесь, в отличие от предыдущих примеров, в условии задачи не указаны мероприятия или характеристики объектов, от которых зависят исходные вероятности. Поэтому обратные вычисления на этом заканчиваются, и перечень необходимых мероприятий, позволяющих повысить исходные вероятности, не приводится.

3.3.2. Решение задач без указания приоритетности целей

Напомним, что задача обратных вычислений, решаемая для поиска безусловной вероятности наступления одного из двух совместных событий, в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} P(A+B) \pm \Delta P(A+B) = P(A) \pm \Delta P(A) + P(B) \pm \\ \pm \Delta P(B) - (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B) \pm \Delta P(B)), \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A), \\ \Delta P(B) = k \cdot P(B). \end{cases}$$

Обозначения прежние.

7. Целевая установка:

$$\boldsymbol{P(A+B)^{+} = P(A)^{+} + P(B)^{+} - P(A)^{+} P(B)^{+}}.$$

Будем считать, что повышение вероятности попаданий должно достигаться за счет снижения вероятности первого попадания, но повышения второго. Тогда система неравенств запишется следующим образом:

$$\begin{cases} P(A+B) + \Delta P(A+B) = P(A) + \Delta P(A) + P(B) + \\ + \Delta P(B) - (P(A) - \Delta P(A))(P(B) + \Delta P(B)), \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A), \\ \Delta P(B) = k \cdot P(B). \end{cases}$$

П р и м е р . Воспользуемся исходными данными из предыдущего примера. Подставив их, получим следующее уравнение:

$$0,3k^2 - 0,5k + 0,12 = 0,$$

откуда k = 0,29; $\Delta P(A)$ = 0,29 · 0,6 = 0,174; $\Delta P(B)$ = 0,29 · 0,5 = = 0,145; $P(A) + \Delta P(A)$ = 0,774; $P(B) + \Delta P(B)$ = 0,645.

Проверка. $P(A + B) + \Delta P(A + B)$ = 0,92.

8. Целевая установка:

$$\boldsymbol{P(A+B)^+ = P(A)^- + P(B)^+ - P(A)^- P(B)^+}.$$

Система уравнений для решения обратной задачи примет вид:

$$\begin{cases} P(A+B) + \Delta P(A+B) = P(A) - \Delta P(A) + P(B) + \\ + \Delta P(B) - (P(A) - \Delta P(A))(P(B) + \Delta P(B)), \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A), \\ \Delta P(B) = k \cdot P(B). \end{cases}$$

П р и м е р . Воспользуемся исходными данными предыдущего примера, однако будем считать, что повышение вероятности попаданий должно достигаться за счет снижения вероятности первого попадания и повышения второго. Подставив известные величины в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 0,12 = -0,5\Delta P(A) + 0,4\Delta P(B) + \Delta P(A) \cdot \Delta P(B), \\ \Delta P(A) = k \cdot 0,6, \\ \Delta P(B) = k \cdot 0,5. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение

$$0,3k^2 - 0,1k - 0,12 = 0,$$

получим k = 0,82; $\Delta P(A)$ = 0,6 · 0,82 = 0,49; ΔP(B) = 0,5 · 0,82 = = 0,41; $P(A) - \Delta P(A)$ = 0,6 – 0,49 = 0,11; $P(B) + \Delta P(B)$ = 0,5 + 0,41 = = 0,91.

Проверка. $P(A + B) + \Delta P(A + B)$ = 0,11 + 0,91 – 0,11 · 0,91 = 0,92.

3.4.
Поиск условной вероятности совместного наступления событий

Известно, что вероятность совместного наступления двух событий A и B равна вероятности наступления события A, умноженной на условную вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже произошло, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A),$$

где $P(A)$ – вероятность наступления события A;

$P(B \mid A)$ – условная вероятность наступления события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло.

3.4.1.
Решение задачи без коэффициентов прироста

9. Целевая установка:

$$\boldsymbol{P(A \cdot B)^{\pm} = P(A)(\alpha))^{\pm} \cdot P((B \mid A)(\beta))^{\pm}}.$$

На основании формулы совместного наступления двух событий запишем задачу обратных вычислений следующим образом:

$$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B \mid A) \pm \Delta P(B \mid A)), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta}, \end{cases}$$

где $P(A \cdot B)$ – вероятность совместного наступления событий A и B;

$P(A)$, $P(B)$ – вероятности наступления независимых событий A и B;

$\Delta P(A \cdot B)$ – желаемый прирост (положительный или отрицательный) вероятности совместного наступления событий A и B;

$\Delta P(B \mid A)$ – прирост вероятности свершения события B при условии, что событие A свершилось;

$\Delta P(A)$, $\Delta P(B)$ – приросты вероятностей наступления независимых событий A и B соответственно;

α, β – коэффициенты приоритетности в наступлении событий A и B соответственно.

Пример. Для иллюстрации процесса решения обратной задачи рассмотрим вначале следующую прямую задачу. В урне 12 шаров, из них 4 белых и 8 красных. Два белых шара и четыре красных помечены голубой полоской. Какова вероятность извлечения красного шара с полоской.

Обозначив буквой A событие извлечения красного шара, а буквой B – то, что красный шар имеет голубую полоску, можно найти искомую вероятность

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{3} = 0{,}33.$$

Допустим, необходимо увеличить вероятность извлечения красного шара с полоской до 0,5. Причем большей частью – за счет повышения вероятности извлечения красного шара ($\alpha = 0{,}6$) и меньшей частью – за счет того, что этот шар будет с голубой полоской ($\beta = 0{,}4$). Обе вероятности должны увеличиваться. Графическая интерпретация противоположной задачи обратных вычислений условной вероятности представлена на рис. 3.6.

Сплошная дуга, связывающая линии графа, указывает на то, что речь идет о появлении обоих событий (A и B).

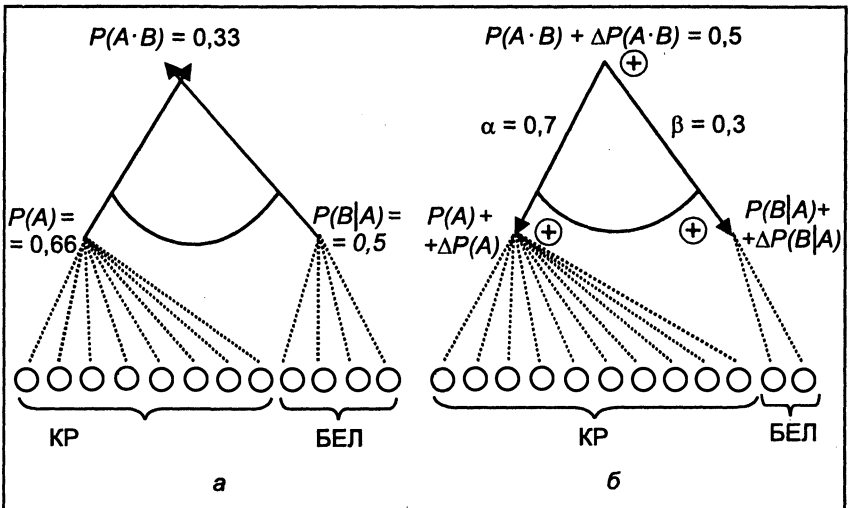


Рис. 3.6

Для решения задачи обратных вычислений вначале запишем систему уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} P(A \cdot B) + \Delta P(A \cdot B) = (P(A) + \Delta P(A))(P(B \mid A) + \Delta P(B \mid A)), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Подставив известные величины, получим:

$$\begin{cases} 0,5 = (0,66 + \Delta P(A))(0,5 + \Delta P(B \mid A)), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B \mid A)} = \dfrac{0,6}{0,4}. \end{cases}$$

Решив данную систему получим:

$$\Delta P(A) = 0,16;\ \Delta P(B \mid A) = 0,12,$$
$$P(A) + \Delta P(A) = 0,66 + 0,16 = 0,82,$$
$$P(B \mid A) + \Delta P(B \mid A) = 0,5 + 0,12 = 0,62.$$

Проверка. $P(A \cdot B) + \Delta P(A \cdot B) = 0,82 \cdot 0,62 = 0,51 \approx 0,5$.

Теперь найдем соотношение шаров, которое должно обеспечить желаемый прирост вероятности:

красных: $P(A) + \Delta P(A) = \dfrac{X_1}{12},\ X_1 \approx 10;$

красных с полоской: $P(B \mid A) + \Delta P(B \mid A) = \dfrac{X_2}{10},\ X_2 \approx 2.$

На рис. 3.6, *б* показано новое соотношение шаров после выполнения обратных вычислений. Число белых шаров сократилось до 2, для того чтобы общее количество шаров было неизменным, а именно 12.

3.4.2. Решение задач без указания приоритетности целей

10. Целевая установка:

$$\boldsymbol{P(A \cdot B)^{\pm} = P(A)^{\pm} \cdot P(B \mid A)^{\pm}}.$$

Как и прежде, составим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B \mid A) \pm \Delta P(B \mid A)), \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A), \\ \Delta P(B \mid A) = k \cdot P(B \mid A). \end{cases}$$

Решая эту систему, необходимо вначале выяснить, имеет ли она решение, так как зависимые события более чувствительны к исходным данным по сравнению с независимыми.

3.5. Поиск условной вероятности совместного наступления независимых событий

Известно, что вероятность совместного появления независимых, но совместных событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B \cdot C \cdot \ldots) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot \ldots.$$

3.5.1. Решение задач без коэффициентов прироста

11. Целевая установка:

$\boldsymbol{P(A \cdot B)^{\pm} = P(A(\alpha))^{\pm} \cdot P(B(\beta))^{\pm}}$.

На основании формулы появления двух независимых, но совместных событий задачу сформулируем следующим образом:

$$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B) \pm \Delta P(B)), \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Обозначения прежние.

3.5.2. Решение задач без указания приоритетов целей

12. Целевая установка: $P(A \cdot B)^{\pm} = P(A)^{\pm} \cdot P(B)^{\pm}$.

Задача, в которой приросты будут определяться с помощью единого коэффициента, принимает вид:

$$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B) \pm \Delta P(B)), \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A), \\ \Delta P(B) = k \cdot P(B). \end{cases}$$

Обозначения прежние.

3.6. Поиск вероятности наступления события совместно с одним из ряда несовместных событий (полная вероятность)

Обратные вычисления оказываются чрезвычайно полезными при принятии решений, касающихся наступления некоторого события совместно с другими событиями, обычно называемыми гипотезами. Речь идет о формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A | H_i),$$

где $P(A)$ – вероятность наступления события A;
$P(H_i)$ – вероятность осуществления гипотезы H_i;
$P(A | H_i)$ – условная вероятность наступления события A при осуществлении гипотезы H_i.

3.6.1. Решение задач без коэффициентов прироста

13. Целевая установка:

$$P(A)^{\pm} = P(H_1(\alpha))^{\pm} \cdot P(A | H_1) + P(H_2(\beta))^{\pm} \cdot P(A | H_2).$$

При наличии двух гипотез задача обратных вычислений может быть сформулирована в следующем виде:

$$\begin{cases} P(A) \pm \Delta P(A) = (P(H_1) \pm \Delta P(H_1) \pm \Delta P(H_1))P(A|H_1) + (P(H_2 \pm \Delta P(H_2))P(A|H_2), \\ \dfrac{\Delta P(H_1)}{\Delta P(H_2)} = \dfrac{\alpha(H_1)}{\beta(H_2)}, \end{cases}$$

где $\alpha(H_1)$, $\beta(H_2)$ – коэффициенты приоритетов осуществления гипотез H_1 и H_2 (сумма их равняется единице).

Вполне реальны задачи управления не только безусловными, но и условными вероятностями; для решения таких задач необходима информация о приоритете наступления события при осуществлении той или иной гипотезы. Тогда в систему уравнений необходимо добавить информацию о пропорциях в изменении приростов условных вероятностей. Такая задача примет вид:

$$\begin{cases} P(A) \pm \Delta P(A) = (P(H_1) \pm \Delta P(H_1))(P(A|H_1) \pm \\ \pm \Delta P(A|H_1))(P(H_2)) \pm \Delta P(H_2))(P(A|H_2) \pm \Delta P(A|H_2)), \\ \dfrac{\Delta P(H_1)}{\Delta P(H_2)} = \dfrac{\alpha(H_1)}{\beta(H_2)}, \\ \dfrac{\Delta P(A|H_1)}{\Delta P(A|H_{2)})} = \dfrac{\gamma(H_1)}{\delta(H_2)}, \end{cases}$$

где $\Delta P(A|H_1)$, $\Delta P(A|H_2)$ – приросты условных вероятностей наступления события A при осуществлении гипотез H_1 и H_2 соответственно;

$\gamma(H_1)$, $\delta(H_2)$ – коэффициенты приоритетности наступления события A при осуществлении гипотез H_1 и H_2 соответственно.

Остальные обозначения прежние.

В общем случае в рассматриваемой задаче может фигурировать не две гипотезы, а больше. Тогда задача должна быть записана с учетом нормирования коэффициентов приоритетности, что является условием применения процедуры свертки/развертки.

П р и м е р (рис. 3.7). В начале рассмотрим прямую задачу.

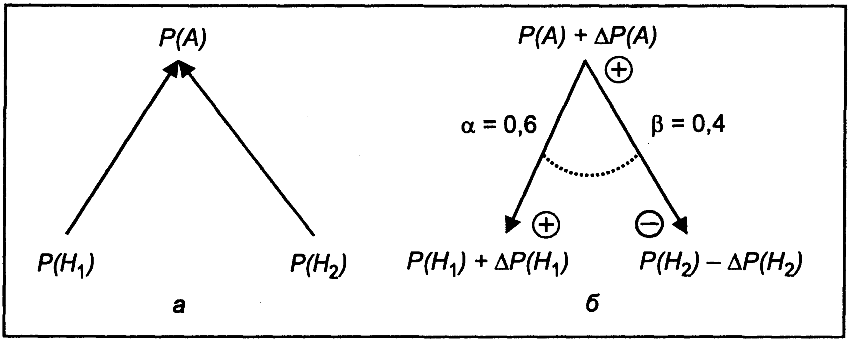


Рис. 3.7

В цехе два типа станков производят одни и те же детали. Производительность станков одинакова, но качество выпускаемой продукции различное: первый тип станков дает 0,90, а второй – 0,75 продукции отличного качества. Вся продукция содержится на складе. Число станков первого типа 7 шт., а второго – 3 шт. Определить вероятность того, что взятая наугад продукция окажется отличного качества.

Пусть A – событие, состоящее в том, что взятая наугад продукция отличного качества. Имеются также две гипотезы:

H_1 – взятая продукция произведена станками первого типа;

H_2 – то же станками второго типа.

Тогда

$$P(H_1)=\frac{7}{10};\ P(H_2)=\frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах следующие:

$$P(A|H_1)=0{,}90;\ \ P(A|H_2)=0{,}75.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}75=0{,}825.$$

Теперь допустим, что существует необходимость повышения $P(A)$ до 0,91. Каковы при этом должны быть соотношения станков, если приоритетность в изменении станков следующая: число станков первого типа должно увеличиваться пропорционально коэффициенту $\alpha = 0{,}6$, а второго – уменьшаться пропорционально коэффициенту $\beta = 0{,}4$.

Графическая интерпретация обратных вычислений в случае применения формулы полной вероятности представлена на рис. 3.7, *б*.

Для решения задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} P(A)+\Delta P(A)=(P(H_1)+\Delta P(H_1))P(A|H_1)+(P(H_2)-\Delta P(H_2)P(A|H_2)), \\ \dfrac{\Delta P(H_1)}{\Delta P(H_2)}=\dfrac{\alpha(H_1)}{\beta(H_2)}. \end{cases}$$

Решая эту систему, следует тщательно проанализировать область значений исходных данных, при которых задача имеет смысл.

3.6.2. Решение задач без коэффициентов прироста

14. Целевая установка:

$$\boldsymbol{P(A)^{\pm}=P(H_1)^{\pm}\cdot P(A|H_1)+P(H_2)^{\pm}\cdot P(A|H_2).}$$

В соответствии с общей постановкой задач данного класса запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P(A)\pm\Delta P(A)=(P(H_1)\pm\Delta P(H_1))P(A|H_1)(P(H_2)\pm\Delta P(H_2)P(A|H_2)), \\ \Delta P(H_1)=k\cdot P(H_1), \\ \Delta P(H_2)=k\cdot P(H_2). \end{cases}$$

Обозначения прежние.

3.7. Поиск вероятности, характеризуемой функцией или плотностью распределения

До сих пор изучались случайные события, качественно характеризующие результаты опыта. Теперь можно рассмотреть результат опыта, характеризуемый количественно. Как известно, случайную величину можно представить с помощью функции распределения. Если известна функция распределения, то задача обратных вычислений может быть решена с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} P((x_1\pm\Delta x_1)<X<(x_2\pm\Delta x_2))=F(x_2\pm\Delta x_2)-F(x_1\pm\Delta x_1), \\ \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=\dfrac{\alpha}{\beta}, \end{cases}$$

где F – функция распределения случайной величины x;

$P(A < X < B)$ – вероятность того, что случайная величина x примет значение на отрезке (A, B);

$\pm\Delta x_1, \pm\Delta x_2$ – приросты (положительные или отрицательные) границ отрезка (A, B), которые обеспечивают требуемый прирост вероятности попадания случайной величины x в отрезок;

α, β – приоритетность направлений при расширении границ попадания случайной величины.

П р и м е р . Допустим, известна функция распределения, имеющая вид:

$$F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2, 1 \le x \le 3.$$

Вначале решим задачу следующего содержания: определить вероятность того, что случайная величина x в результате опыта примет значение на отрезке (1; 2). Исходя из свойств функции распределения, имеем:

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = 0,25.$$

Теперь сформулируем задачу обратных вычислений: на сколько следует расширить границы попадания, чтобы вероятность выросла до 0,3. При этом приоритеты расширения границ следующие: для нижней границы – 0,4, для верхней – 0,6. Теперь система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 0,3 = \frac{1}{4}((x_2 + \Delta x_2) - 1)^2 - \frac{1}{4}((x_1 + \Delta x_1) - 1)^2, \\ \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{0,6}{0,4}. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим:

$$\Delta x_1 = 0,0425; \Delta x_2 = 0,1.$$

Отсюда границы участка [1; 2] изменятся и будут следующими: [1,0425; 2,1].

Проверка. $\frac{1}{4}(2,1-1)^2 - \frac{1}{4}(1,0425-1)^2 \approx 0,3.$

Здесь так же, как и ранее, следует внимательно проанализировать исходные данные, от которых зависит результат решения. Аналогично решаются задачи, в которых задана плотность распределения.

3.8. Поиск вероятности появления события в серии испытаний (формула Бернулли)

В управлении рисками достаточно часто применяется формула Бернулли для определения вероятности $P(n, m)$ того, что в результате проведения n независимых испытаний некоторое событие A наступит ровно m раз. При этом в каждом из таких испытаний данное событие наступает с определенной вероятностью $P(A)$.

Сформулируем задачу обратных вычислений следующим образом:

известна вероятность того, что в результате проведения n независимых испытаний событие A наступит m раз ($P(n, m)$). На сколько следует увеличить число независимых испытаний (Δn) и постоянную вероятность $\Delta P(A)$, для того чтобы вероятность наступления события A увеличилась на $\Delta P(n, m)$.

Если, как и ранее, использовать метод обратных вычислений без коэффициентов прироста, то для решения этой задачи надлежит записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P(n, m) + \Delta P(n, m) = \dfrac{n! + \Delta n}{m!(n + \Delta n - m)} (P + \Delta P)^m (1 - P)^{n + \Delta n - m}, \\ \dfrac{\Delta P}{\Delta n} = \dfrac{\alpha(P)}{\beta(n)}, \end{cases}$$

где $\alpha(P)$ – коэффициент приоритетности наступления события, характеризуемого вероятностью $P(A)$;

$\beta(n)$ – коэффициент приоритетности увеличения числа независимых испытаний n.

Заканчивая изложение теоретических основ обратных вероятностных вычислений, еще раз обратим внимание на необходимость внимательного анализа исходных данных, так как легко получить бессмысленные результаты, если у лица, принимающего решение, слишком высокие требования.

Глава 4

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Экспертные системы, как яркое и когда-то быстро прогрессировавшее направление в одной из областей искусственного интеллекта, в последнее время перестали привлекать внимание как теоретиков, так и практиков. Теоретики охладели потому, что, за исключением некоторых ответвлений, данное направление исчерпало себя и перешло в ранг технологии, превратившись в одно из средств информационного обслуживания. Практики же в определенной своей части разочарованы тем, что функционирующие экспертные системы, односложно отвечая на вопрос: «Что делать?», не в состоянии подсказать пользователю: «Как делать?». На вопросы вида: «Будет ли наблюдаться деловая активность?» или «Покупать ли акции на землю?» системы, как правило, выдают ответ в форме «ДА» или «НЕТ», с числовой оценкой его достоверности (в форме коэффициента определенности). При этом они не способны ответить на вопрос: «Что необходимо предпринять для того, чтобы деловая активность возросла?» или «Что необходимо предпринять, чтобы цены на акции поднялись (опустились) на заданную величину?».

Лицо, формирующее решение (ЛФР), хочет указывать приемлемый для него уровень достоверности получаемого ответа и знать обстоятельства, при которых этот уровень возможен. Например, после получения положительного или отрицательного ответа на один из указанных вопросов с коэффициентом определенности, равным 0,24, у ЛФР возникает желание узнать, что следует предпринять для того, чтобы рост деловой активности повысился, причем коэффициент определенности такого роста был не менее 0,7. То же самое можно потребовать от системы и относительно акций.

Получить подобные результаты можно, если снабдить экспертную систему средствами обратных вычислений. Прежде чем перейти к их детальному изложению, необходимо остановиться на теоретическом базисе, положенном в основу обработки нечеткой информации.

Одно из главных достижений в области экспертных систем, которое рассматривалось как серьезный шаг в развитии инженерии знаний, заключалось в возможности использования «мягких» вычислений для обработки неточной и неполной информации. Термин «мягкие» вычисления введен Л. Заде [9]. Главным принципом «мягких» вычислений является терпимость к неточности информации для достижения приемлемых результатов. Часто это единственно возможный путь к достижению целей принятия решения. В отличие от «жестких» вычислений, базирующихся на детерминированных или точных моделях и использующих классическую математическую логику и точные методы, «мягкие» вычисления более близки к реальной информации, поступающей из окружающей среды. И эта информация редко бывает точной, большей частью она приблизительна, отрывочна, противоречива.

К настоящему времени «мягкие» вычисления развились в комплексную дисциплину, которая включает:

- нечеткую логику и теорию нечетких множеств;
- системы приближенных рассуждений;
- системы управления приближенными данными (нейросети и генетические алгоритмы);
- теорию хаоса;
- фрактальный анализ.

Далее будут рассматриваться лишь два из перечисленных направлений «мягких» вычислений, а именно: системы приближенных рассуждений и нечеткие множества. В таких системах может использоваться один из двух механизмов оперирования с неточными высказываниями (суждениями):

- «присоединение» – процесс вывода результатов рассуждений выполняется аналогично точным выводам, но параллельно этим выводам происходит специальный пересчет, позволяющий выявить уровень приблизительности полученных результатов;
- вывод осуществляется на специально разработанном языке представления неточностей.

Рамки применимости классической математической логики и теории вероятностей к моделированию реальных процессов определяются четкостью, измеримостью и достоверностью исходной информации. К сожалению, большинство перечисленных свойств не характерны для используемых человеком знаний. Как правило, это приближенные рассуждения, сочетающие в себе многочисленные динамически изменяющиеся шкалы. Это означает, что если теоретико-вероятностные модели в соответствии с указанными ограничениями должны ориентироваться на единую шкалу измерения объектов, процессов, состояний, то реальные модели, отражаемые с помощью приближенных рассуждений (знаний), базируются на многих шкалах. Такие шкалы, подобно тому, как это делает человек, должны выбираться динамично, отражая природу измеряемого процесса в соответствии с целями моделирования и с реальной ситуацией. Отсюда вполне естественным выглядит применение классической математической логики и теории вероятностей лишь в качестве теоретической основы, используемой для построения методов, более адекватно отражающих реальные процессы.

Рассмотрим, каким образом можно воспользоваться механизмом «присоединения», базируясь на фундаментальных конструкциях математической логики и основополагающих идеях теории вероятностей. Для этого следует выделить такие понятия как импликация (ЕСЛИ – ТО), конъюнкция, дизъюнкция, условная и безусловная вероятность.

4.1. Дерево вывода

Достаточно сложно создать цепочку рассуждений с несколькими вероятностными условиями, связанными логическими операциями И, ИЛИ, НЕ. Поэтому, создавая многие экспертные системы, разработчики отказываются от условных вероятностей и вместо них используют приближенные вычисления. Понятие вероятности заменяется на коэффициент определенности.

Существует достаточно методов, ориентированных на учет неопределенности процессов, событий, объектов и т.д. Далее пойдет речь об одном из них, способном отражать неопределенность с помощью нечетких множеств и деревьев вывода. Последние, как известно, синтезируют множество правил, записанных в форме ЕСЛИ-ТО. Каждое правило характеризуется рядом параметров, обозначаемых специальным образом.

Пусть известно правило:

если a, то b.

Оно характеризуется следующими параметрами:

a – условие (посылка);

b – заключение (результаты вывода);

$ct(a)$ – коэффициент определенности условия;

ct(пр) – коэффициент определенности правила (импликации);

$ct(b)$ – коэффициент определенности заключения.

Все правила могут быть обратимы (о) или необратимы (н). Коэффициенты определенности могут изменяться в диапазоне от –1 до 1. Единица присваивается в том случае, если условие, правило или вывод заслуживают полного доверия, и минус единица, если они не заслуживают никакого доверия. Более подробно об этом можно прочитать в [4].

Так как число формул, с помощью которых обрабатываются правила вывода, невелико, прежде чем приступить к рассмотрению обратных вычислений, приведем их с краткими пояснениями и примерами.

Существует несколько типов правил, на основе которых вычисляются коэффициенты достоверности заключения:

тип 1 – правило содержит одно условие;

тип 2 – правило содержит несколько условий, связанных союзом И;

тип 3 – правило содержит несколько условий, связанных союзом ИЛИ;

тип 4 – одно заключение поддерживается несколькими правилами.

На рис. 4.1 типы правил представлены графически.

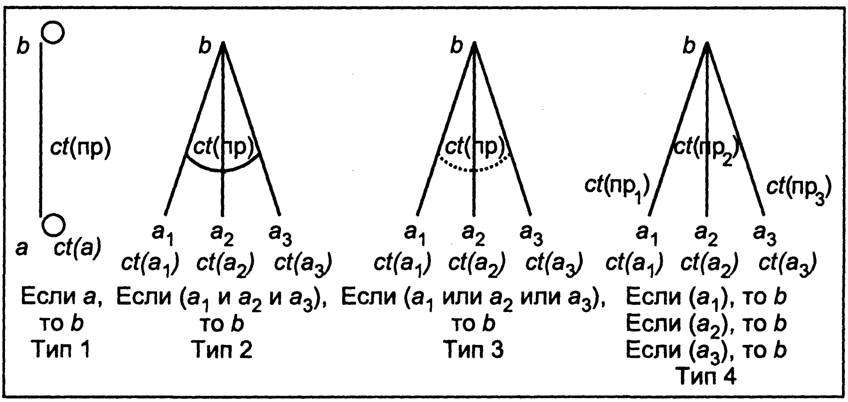


Рис. 4.1

Содержание приведенных правил может быть, например, таким:

т и п 1 – если ВВП возрастет, то реальная заработная плата возрастет;

т и п 2 – если сократится отток капитала и фискальная политика будет умеренной, то будет наблюдаться инвестиционный рост;

т и п 3 – если экспорт превысит импорт или снизится темп инфляции, то ВВП возрастет;

т и п 4 – а) если себестоимость продукции уменьшится, то конкурентоспособность возрастет;

б) если качество продукции повысится, то конкурентоспособность возрастет.

Для каждого типа правил разработаны формулы, согласно которым происходит вычисление коэфициента определенности заключения.

Для типа 1 – если a, то b.

$$ct(b) = ct(a) \cdot ct(np).$$

П р и м е р : $ct(a) = 0{,}6$; $ct(np) = 0{,}8$; $ct(b) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

Для типа 2 – если (a_1 и a_2 и... и a_m), то b.

$$ct(b) = ct_{\min}(a) \cdot ct(np), \text{ где } ct_{\min}(a) = \min\,(ct(a_1), ct(a_2), ..., ct(a_m)).$$

П р и м е р : $ct(a_1) = 0{,}2$; $ct(a_2) = 0{,}8$; $ct(a_3) = 0{,}5$; $ct(np) = 0{,}6$; $ct_{\min}(a) = 0{,}2$; $ct(b) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$.

Для типа 3 – если (a_1 или a_2 или...или a_m), то b.

$$ct(b) = ct_{\max}(a) \cdot ct(np), \text{ где } ct_{\max}(a) = \max\,(ct(a_1), ct(a_2), ..., ct(a_m)).$$

П р и м е р : $ct(a_1) = 0{,}1$; $ct(a_2) = 0{,}6$; $ct(a_3) = 0{,}4$; $ct(np) = 0{,}4$; $ct_{\max}(a) = 0{,}6$; $ct(b) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$.

Для типа 4:

вариант 1 – знаки коэффициентов определенности положительные,

$$ct(b) = ct(b_1) + ct(b_2) - ct(b_1)ct(b_2),$$

где $ct(b_1) = ct(a_1)ct(np1)$,

$ct(b_2) = ct(a_2)ct(np2)$.

Пример (рис. 4.2): $ct(a_1) = 0{,}3$; $ct(a_2) = 0{,}6$; $ct(np1) = 0{,}8$; $ct(np2) = 0{,}9$; $ct(b_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$; $ct(b_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$; $ct(b) = 0{,}24 + 0{,}54 - 0{,}24 \cdot 0{,}54 = 0{,}65$;

вариант 2 – знаки коэффициентов определенности различные,

$$ct(b) = \frac{ct(b_1) + ct(b_2)}{1 - \min\,(abs\,(ct(b_1)),\, abs\,(ct(b_2)))},$$

где $ct(b_1)$, $ct(b_2)$ – те же, что и в варианте 1.

Пример (рис. 4.3): $ct(a_1) = 0{,}9$; $ct(a_2) = -0{,}3$; $ct(np1) = 0{,}9$; $ct(np2) = 0{,}7$; $ct(b_1) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$; $ct(b_2) = (-0{,}3) \cdot 0{,}7 = -0{,}21$;

$$ct(b) = \frac{0{,}81 + (-0{,}21)}{1 - 0{,}21} = 0{,}74;$$

вариант 3 – оба знака отрицательные,

$$ct(b) = ct(b_1) + ct(b_2) + ct(b_1)ct(b_2),$$

где $ct(b_1)$, $ct(b_2)$ – те же, что и в варианте 1.

Пример (рис. 4.4): $ct(a_1) = -0{,}4$; $ct(a_2) = -0{,}3$; $ct(np1) = 0{,}6$; $ct(np2) = 0{,}5$; $ct(b_1) = -0{,}4 \cdot 0{,}6 = -0{,}24$; $ct(b_2) = -0{,}3 \cdot 0{,}5 = -0{,}15$; $ct(b) = -0{,}24 + (-0{,}15) + (-0{,}24) \cdot (-0{,}15) = -0{,}35$.

Если заключение поддерживается тремя правилами с положительными коэффициентами, то формула расчета будет следующей:

$$ct(b) = ct(b_1) + ct(b_2) + ct(b_3) - ct(b_1)ct(b_2) - ct(b_1)ct(b_3) - ct(b_2)ct(b_3) + ct(b_1)ct(b_2)ct(b_3).$$

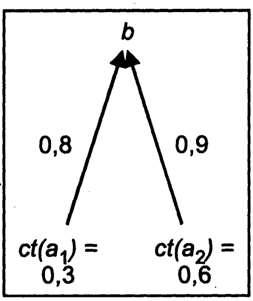


Рис. 4.2

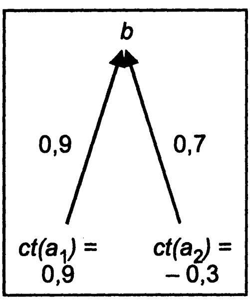


Рис. 4.3

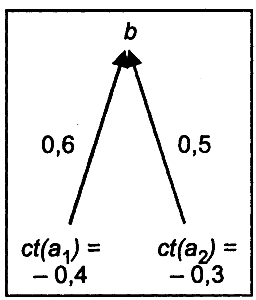


Рис. 4.4

Иногда в правиле условие отрицается, например,

если (не a), то b.

В этом случае можно поступить следующим образом:

$$ct(не\_a) = -ct(a).$$

4.2. Комплексный пример прямых расчетов на дереве вывода

Представим дерево вывода, пока без содержательного наполнения условий, правил и заключений. На рис. 4.5 с помощью цифр, указанных рядом с вершиной дерева, указаны коэффициенты определенности либо условия, либо правила, либо заключения. Правило, имеющее несколько условий, связанных союзом И, представляется с помощью сплошной дуги, а союзом ИЛИ – пунктирной. Перечеркнутая дуга свидетельствует об отрицании условия. Кроме того, в скобках указано либо «о», либо «н», что означает обратимость или необратимость правила.

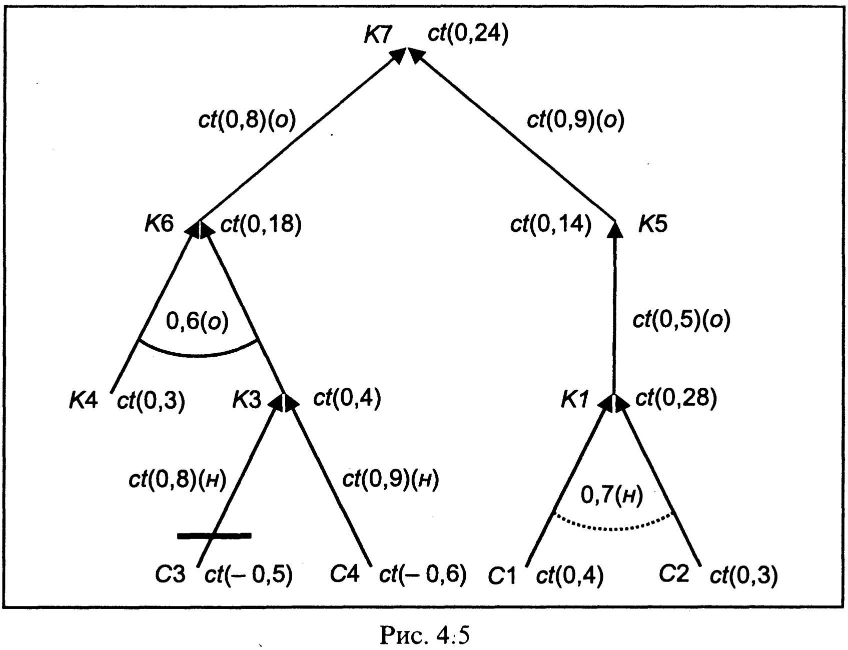


Рис. 4.5

Так как выполняются прямые расчеты, вычисления ведут снизу вверх. Расчет начнем с заключения $K1$, выводимого на основании правила, в котором условия $C1$ и $C2$ связаны союзом ИЛИ. Для расчета среди условий следует выбрать максимальное значение коэффициента определенности и умножить его на коэффициент определенности правила. Тогда коэффициент определенности заключения $K1$ равен:

$$ct(K1) = \max\ (ct(C1), ct(C2)) \cdot ct(np) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28.$$

Коэффициент определенности для $K5$ равен:

$$ct(K5) = ct(K1) \cdot ct(np) = 0,28 \cdot 0,5 = 0,14.$$

Заключение $K3$ выводится на основании двух правил, одно из которых обратимо, а второе нет. Правило является обратимым, если оно сохраняет смысл при отрицании условия или заключения. Так как оба правила необратимы, необходимо проверить знак у коэффициентов определенности условий. Если этот знак отрицательный, то правило отбрасывается. Но если при отрицательном знаке коэффициент определенности имеет еще и знак отрицания, то знак при коэффициенте меняется на противоположный. Таким образом, при рассмотрении любого правила следует проанализировать:

- тип правила (обратимо, необратимо);
- знак коэффициента определенности условия (положительный, отрицательный);
- наличие отрицания у условия.

Формально это можно представить в виде индикаторной функции:

$$\lambda = (m, з, o),$$

где m – тип правила;

$з$ – знак коэффициента определенности условия;

o – знак определенности(или неопределенности).

Индикаторная функция λ в полной мере используется лишь при наличии необратимого правила, отрицательного знака и наличия знака отрицания в условии. Варианты значений индикаторной функции представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Значения индикаторной функции для необратимых правил

Условие		Значение индикаторной функции
знак коэффициента определенности	наличие знака отрицания	
+	Отсутствует	1
+	Присутствует	0
–	Отсутствует	0
–	Присутствует	–1

Рассматривая правило для вывода $K3$ с помощью функции λ, приходим к следующему выводу: правило, использующее $C4$, следует отбросить, так как оно необратимо: знак у коэффициента определенности отрицательный, а само условие не отрицается. Другое правило также необратимо и содержит отрицательный знак у коэффициента определенности условия, но оно имеет знак отрицания, что меняет знак у условия на противоположный. Таким образом, для $K3$ получим

$$ct(K3) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4.$$

Заключение $K6$ выводится на основании одного правила, условия которого связаны союзом И. Поэтому получим

$$ct(K6) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18.$$

Заключение $K7$ выводится на основании двух правил. Поэтому вначале следует вычислить коэффициенты определенности, получаемые каждым из них в отдельности, а затем общий коэффициент для $K7$:

$$ct(K7_1) = 0{,}18 \cdot 0{,}8 = 0{,}14;$$
$$ct(K7_2) = 0{,}14 \cdot 0{,}9 = 0{,}12;$$
$$ct(K7) = 0{,}14 + 0{,}12 - 0{,}14 \cdot 0{,}12 = 0{,}24.$$

Очень часто терминальные (нижние) вершины дерева вывода зависят от значений показателей, находящихся в базе данных. Связываются эти вершины с соответствующими показателями из базы данных с помощью реляционных выражений (больше, меньше, равно и т.д.). Элементы реляционных выражений, как правило, рассчитываются с помощью формул, иногда достаточно сложных.

В известных работах [3,4] реляционные выражения используются лишь в качестве индикаторов, которые работают следующим образом: если реляционное выражение истинно, то знак коэффициента определенности условия не меняется, в ином случае знак меняется на обратный. Иными словами, система работает в режиме булевой алгебры, что достаточно грубо отражает связь между реальными событиями. На рис. 4.6 иллюстрируется индикатор λ, принимающий значение либо 1, либо -1 в зависимости от истинности или ложности реляционного выражения.

Согласно такому подходу на рис. 4.6 коэффициент определенности равен 0,5, так как $P > k$. Наполним данный пример экономическим смыслом. Пусть заключение b касается покупки дома.

Используется следующее правило: если цена дома P меньше арендной платы K, то дом покупать b. Коэффициент достоверности этого заключения равен:

$$ct(b) = ct(a) \cdot ct(np)\, \lambda,$$

где $ct(b)$ – коэффициент определенности заключения «купить дом»;

$ct(a)$ – коэффициент определенности условия «стоимость аренды превышает цену дома»;

$ct(np)$ – коэффициент определенности правила.

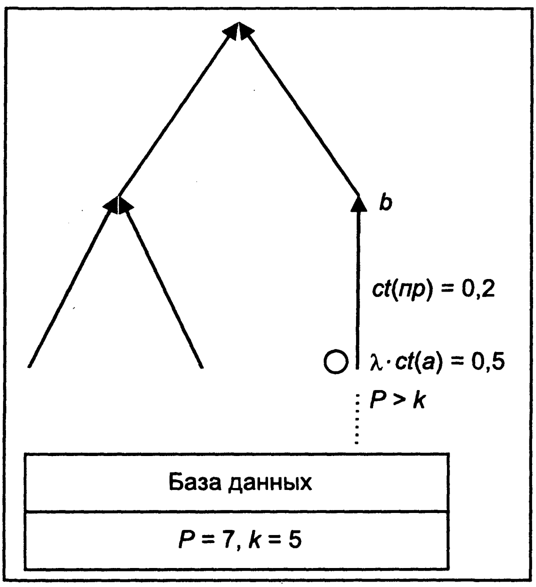


Рис. 4.6

Реляционное выражение $P > k$ влияет на знак индикатора λ, который может принимать два значения: 1 или –1. Можно получить два решения:

$$ct(b_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}1;$$
$$ct(b_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot (-1) = -0{,}1.$$

Между заключениями $ct(b_1)$ и $ct(b_2)$ существует множество значений, которые способны указать более точное отношение покупателя к сложившейся ситуации с ценой дома и его арендой. У покупателя отношение к результатам оценки зависит от того, насколько превышает или не превышает цена арендную плату (например, арендная плата превышает цену дома в несколько раз или на несколько процентов).

Индикатор λ не улавливает также и подозрения покупателя, которые могут возникнуть при неумеренно низкой (высокой) цене дома или арендной платы. Иными словами, индикатор λ не отражает доверие к условию, которое можно выразить с помощью нечетких множеств.

Нечеткое множество можно задать как аналитически, так и графически [6]. Для задания его аналитически воспользуемся функцией принадлежности:

$$F = \frac{\mu_F(u_1)}{u_1}; \ \frac{\mu_F(u_2)}{u_2}; \ \ldots \ \frac{\mu_F(u_n)}{u_n},$$

где $\mu_F(u_i)$ – значение функции в точке u_i;
u_i – значение показателя u_i.

Для задания отношения лица, формирующего решение, к превышению цены дома над арендной платой представим аналитически нечеткое множество следующим образом:

$$A\,(\text{превышение}) = \frac{0{,}05}{0{,}9}; \frac{0{,}1}{1{,}1}; \frac{0{,}4}{1{,}3}; \frac{0{,}8}{1{,}5}; \frac{0{,}9}{1{,}7}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2{,}1}.$$

Графически функция принадлежности представится так, как это показано на рис. 4.7.

Коэффициент определенности на основе функции принадлежности можно вычислить следующим образом:

$$ct(b) = \begin{cases} \mu_A(x), \text{ если реляционное выражение истинно,} \\ r \cdot \mu_A(x), \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

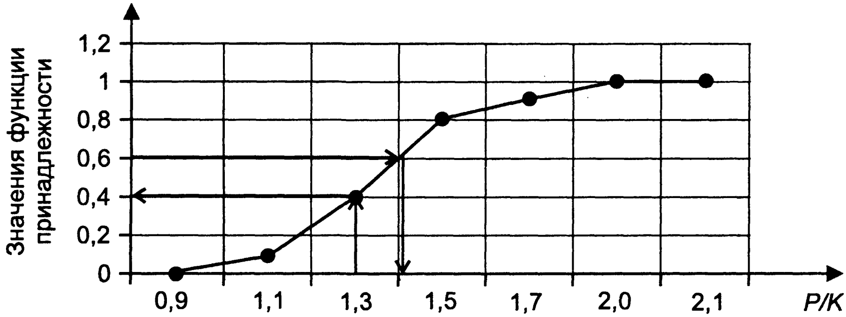


Рис. 4.7

Константа r позволяет правильно учесть достоверность условия в отрицательном диапазоне. Как правило, она находится в диапазоне от 1 до 10.

Пусть в некоторый момент времени значения показателей в базе данных равны: $P = 7$; $K = 5$. Соотношение $\frac{P}{K} = 1{,}3$ указывает на значение функции принадлежности, равное 0,4. Если данное соотношение увеличится, т.е. P будет значительно больше K, то доверие к условию правила возрастает.

Совсем другая ситуация возникает, если семантика соотношения $\frac{P}{K}$ требует колоколообразной функции принадлежности, представленной на рис. 4.8.

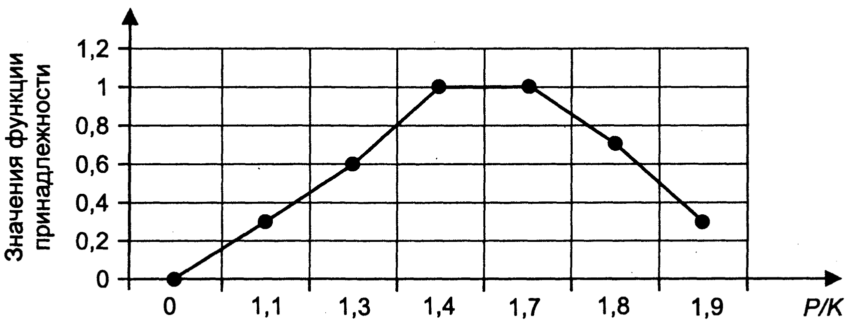


Рис. 4.8

При таком понимании отношения «больше» при $\frac{P}{K}=1{,}8$ доверие к условию правила снижается, а при $\frac{P}{K}=1{,}93$ равно 0,3.

4.3. Обратные вычисления на дереве вывода

Теперь, когда приведены все необходимые формулы, отражающие прямые расчеты на дереве вывода, можно перейти к рассмотрению задач обратных вычислений, которые позволяют ответить на вопрос: «Что следует предпринять, чтобы коэффициент достоверности какого-либо вывода повысился (понизился) на А единиц?» Если в процессе прямых вычислений информация из базы данных передается в дерево вывода, то при обратных вычислениях происходит передача информации из дерева вывода в базу данных. Далее производят вычисления на основе детерминированных зависимостей подобно тому, как это было показано в гл. 2. Схемы передачи информации при прямых и обратных связях показана на рис. 4.9 и 4.10.

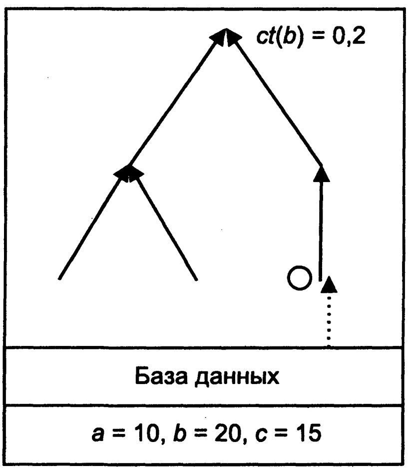


Рис. 4.9

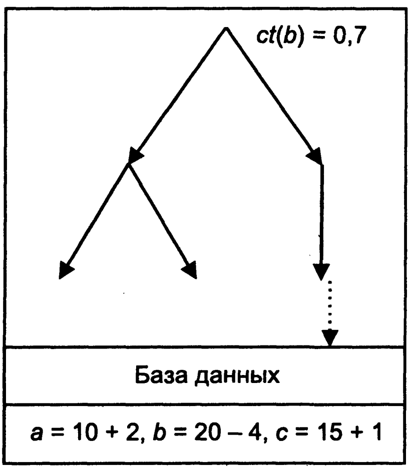


Рис. 4.10

Сформулируем задачу обратных вычислений на дереве вывода следующим образом:

известны

а) дерево вывода главного заключения (гипотезы);

б) коэффициент определенности гипотезы, увеличенный (уменьшенный) до требуемой величины $ct(b) \pm \Delta ct(b)$;

в) реляционные выражения, функции принадлежности, формулы расчетов и база данных;

необходимо определить коэффициенты терминальных вершин, обеспечивающие требуемый уровень достоверности главного заключения.

Принципиальным отличием обратных вычислений от прямых является то, что при прямых вычислениях коэффициент 0,24 (см. рис. 4.9) получают исходя из значений показателей, находящихся в базе данных: $a = 10$, $b = 20$, $c = 15$, при обратных значения $a = 10 + 2$, $b = 20 - 4$, $c = 15 + 1$ получают исходя из задаваемого пользователем желаемого коэффициента 0,7 (см. рис. 4.10).

В рамках рассматриваемого подхода повышение достоверности правил не представляется возможным. Объясняется это тем, что всякое правило является аналогом функции, зависящей от аргументов. Правило, как и функция, устанавливает связь между исходными данными (условиями, посылками) и заключением. Если же правило не устраивает ЛФР (низкий уровень достоверности), то так же, как и в случае наличия какой-либо функции, например детерминированной, его следует заменить. Модификация правила требует модификации дерева вывода.

Рассматриваемые далее целевые установки не столь разнообразны, как в детерминированных зависимостях, так как типов правил вывода всего четыре. Далее будем пользоваться той же типизацией правил, что и в разд. 4.1.

Обратные вычисления для правил типа 1

1. Целевая установка: $ct(b)^{+} = ct^{+}(a) \cdot ct(np)$.

Задача запишется следующим образом:

$$ct(b) + \Delta ct(b) = (ct(a) + \Delta ct(a)) \cdot ct(np).$$

Так как есть лишь одна неизвестная величина, прирост коэффициента определенности условия равен:

$$ct(a) + \Delta ct(a) = \frac{ct(b) + \Delta ct(b)}{ct(np)},$$

что графически можно представить так, как это показано на рис. 4.11.

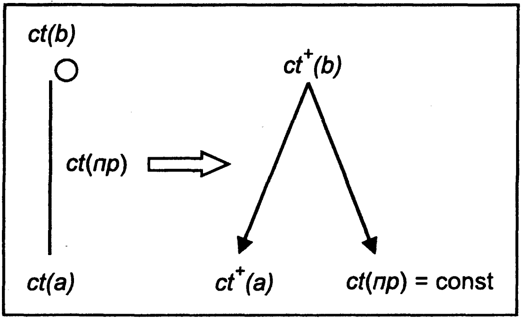


Рис. 4.11

Пример (рис. 4.11). Если $K1$, то $K5$, $ct(K1) = 0{,}4$; $ct(np) = 0{,}8$,

где $K1$ – означает, что возрастет индекс товарности;
$K5$ – возрастет внешнеторговый оборот.

$$ct(K5) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32.$$

Задача обратных вычислений: пусть необходимо повысить $ct(K5)$ до 0,9. Получим: $ct(K1)+\Delta ct(K1)=\dfrac{0{,}9}{0{,}8}=1{,}125$, что больше 1. Очевидно, такой прирост невозможен, поэтому уменьшим его до 0,5. Тогда получим: $ct(K1)+\Delta ct(K1)=\dfrac{0{,}5}{0{,}8}=0{,}62.$

Проверка. $ct(K5)+\Delta ct(K5)=0{,}62\cdot 0{,}8=0{,}449\approx 0{,}5.$

2. Целевая установка: $ct(b)^{-}=ct^{-}(a)\cdot ct(np)$.

Задача запишется следующим образом:

$$ct(b)-\Delta ct(b)=(ct(a)-\Delta ct(a))\cdot ct(np),$$

$$ct(a-\Delta ct(a)=\frac{ct(b)-\Delta ct(b)}{ct(np)}.$$

П р и м е р . Если A, то B, $ct(A) = 0{,}7$; $ct(np) = 0{,}8$;

$$ct(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Задача обратных вычислений: требуется снизить коэффициент достоверности $\Delta ct(B)$ на 0,3.

Получим $ct(A) - \Delta ct(A) = \dfrac{0{,}26}{0{,}8} = 0{,}33.$

Проверка. $ct(B) - \Delta ct(B) = 0{,}33 \cdot 0{,}8 = 0{,}264 \approx 0{,}3.$

Обратные вычисления для правил типа 2

3. Целевая установка: $ct(b)^+ = ct^+_{\min}(a) \cdot ct(np)$,

где $ct^+_{\min}(a) = \min\,(ct(a_1), ct(a_2), \ldots, ct(a_m))$.

Задача запишется следующим образом:

$$ct_{\min}(a) + \Delta ct_{\min}(a) = \frac{ct(b) + \Delta ct(b)}{ct(np)}.$$

Коэффициенты определенности оставшихся условий изменяются пропорционально коэффициенту, равному $\dfrac{ct_{\min}(a) + \Delta ct_{\min}(a)}{ct_{\min}(a)}$.

П р и м е р (рис. 4.12). Если ($K3$ и $K4$), то $K6$, $ct(K3) = 0{,}4$; $ct(K4) =$ $= 0{,}3$; $ct(np) = 0{,}6$,

где $K3$ – означает, что стабилизируются процентные ставки;
$K4$ – означает, что возрастет ВВП;
К6 – означает, что возрастает стабильность в обществе.

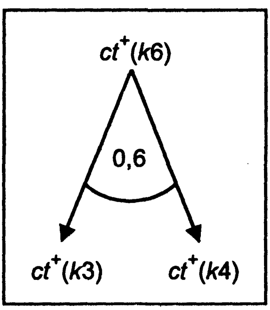


Рис. 4.12

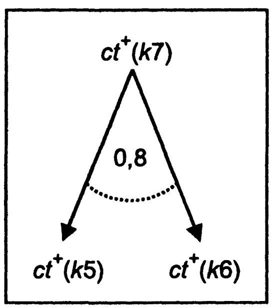


Рис. 4.13

Прямая задача: $ct(K6) = \min((ct(K3), ct(K4)) \cdot ct(np) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

Задача обратных вычислений: требуется увеличить коэффициент достоверности $ct(K6)$ до 0,3. Получим:

$$ct(K4) + \Delta ct(K4) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5.$$

Проверка. $ct(K6) + \Delta ct(K6) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$.

Второе условие ($K3$) также увеличивается пропорционально коэффициенту, равному $\dfrac{ct(K4)+\Delta ct(K4)}{ct(K4)} = \dfrac{0{,}5}{0{,}3} = 1{,}66$;

$$ct(K3) + \Delta ct(K3) = 1{,}66 \cdot 0{,}4 = 0{,}66.$$

Ответ: $ct(K3) = 0{,}66$; $ct(K4) = 0{,}5$.

4. Целевая установка: $\boldsymbol{ct(b)^- = ct^-_{\min}(a) \cdot ct(np)}$,

где $ct^-_{\min}(a) = \min(ct(a_1), ct(a_2), \ldots, ct(a_m))$.

Обратная задача запишется следующим образом:

$$ct_{\min}(a) - \Delta ct_{\min}(a) = \frac{ct(np)}{ct(b) - \Delta ct(b)}.$$

Коэффициенты оставшихся условий изменяются пропорционально коэффициенту, равному $\dfrac{t_{\min}(a)}{ct_{\min}(a) - \Delta ct_{\min}(a)}$.

Обратные вычисления для правил типа 3

5. Целевая установка: $\boldsymbol{ct(b)^+ = ct^+_{\max}(a) \cdot ct(np)}$,

где $ct^+_{\max}(a) = \max(ct(a_1), ct(a_2), \ldots, ct(a_m))$.

Задача запишется следующим образом:

$$ct_{\max}(a) + \Delta ct_{\max}(a) = \frac{ct(b) + \Delta ct(b)}{ct(np)}.$$

Коэффициенты оставшихся условий изменяются пропорционально коэффициенту, равному $\dfrac{ct_{\max}(a) + \Delta ct_{\max}(a)}{t_{\max}(a)}$.

П р и м е р (рис. 4.13). Если ($K5$ или $K6$), то $K7$, $ct(K5) = 0{,}2$; $ct(K6) = 0{,}3$; $ct(np) = 0{,}8$.

Прямая задача: $ct(K7) = \max((ct(K5), ct(K6)) \cdot ct(np)) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$.

Задача обратных вычислений: увеличить коэффициент достоверности $ct(K7)$ до 0,5. Получим: $ct(K6)+\Delta ct(K6)=\dfrac{0{,}5}{0{,}8}=0{,}63.$

Проверка. $ct(K7)+\Delta ct(K7)=0{,}63\cdot 08=0{,}5.$

Второе условие ($K5$) также увеличивается пропорционально коэффициенту, равному

$$\frac{ct(K6)+\Delta ct(K6)}{ct(K6)}=\frac{0{,}63}{0{,}3}=2{,}1;$$

$$ct(K5)+\Delta ct(K5)=2{,}1\cdot 0{,}2=0{,}42.$$

Ответ: $ct(K5) = 0{,}42$; $ct(K6) = 0{,}63$.

6. Целевая установка: $\boldsymbol{ct(b)^{-}=ct_{\max}^{-}(a)\cdot ct(np)}$,

где $ct_{\max}^{-}(a)=\max\,(ct(a_1), ct(a_2),\ldots, ct(a_m))$.

Задача запишется следующим образом:

$$ct_{\max}(a)-\Delta ct_{\max}(a)=\frac{ct(b)-\Delta ct(b)}{ct(np)}.$$

Коэффициенты оставшихся условий изменяются пропорционально коэффициенту, равному $\dfrac{t_{\max}(a)}{ct_{\max}(a)-\Delta ct_{\max}(a)}$.

П р и м е р . Если ($A1$ или $A2$), то B, $ct(A1) = 0{,}2$; $ct(A2) = 0{,}4$; $ct(A3) = 0{,}6$; $ct(np) = 0{,}5$; $\Delta ct(B) = 0{,}2$.

Прямая задача: $ct(B) = \max((ct(A1), ct(A2), ct(A3)) \cdot ct(np)) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$.

Задача обратных вычислений: пусть необходимо снизить коэффициент достоверности $ct(B)$ на 0,2.

Получим: $ct(A3)-\Delta ct(A3)=\dfrac{0{,}1}{0{,}5}=0{,}2.$

Проверка. $ct(B)+\Delta ct(B)=0,2\cdot 0,5=0,1$.

Оставшиеся условия также увеличиваются пропорционально коэффициенту, равному

$$\frac{ct_{\max}(A3)}{ct_{\max}(A3)-ct_{\max}(A3)}=\frac{0,6}{0,3}=2.$$

Ответ: $ct(A1)=\frac{0,2}{3}=0,06;\ ct(A2)=\frac{0,4}{3}=0,13;\ ct(A3)=0,2.$

Обратные вычисления для правил типа 4

Чтобы вывести формулы для обратных вычислений коэффициента достоверности заключения, которое поддерживается несколькими првилами, необходимо от дерева вывода перейти к дереву целей. Для этого вершины дерева целей следует представить составляющими дерева вывода. Допустим, заключение k поддерживается двумя правилами:

если a, то k;

если b, то k.

Тогда в соответствии с формулой расчета коэффициента достоверности заключения, поддерживаемого двумя правилами, получим:

$$ct(k)=ct(b_1)+ct(b_2)-ct(b_1)\cdot ct(b_2),$$

где $ct(b_1)=ct(a)\cdot ct(np_1)$, $ct(b_2)=ct(b)\cdot ct(np_2)$.

С учетом этого получим:

$$ct(k)=ct(a)\cdot ct(np_1)+ct(b)\cdot ct(np_2)-ct(b)\cdot ct(np_1)\cdot ct(b)\cdot ct(np_2).$$

Переход от дерева вывода к дереву целей представлен на рис. 4.14.

Коэффициенты $ct(np_1)$ и $ct(np_2)$ являются константами, т.к. изменить доверие к используемым правилам нельзя.

В соответствии с рис. 4.14 для постановки задачи применяются КОВ (α и β). Если же приоритетность целей установить невозможно или она не важна, то можно применить иную модификацию метода. Рассмотрим некоторые целевые установки, достаточно часто возникающие в практике управления.

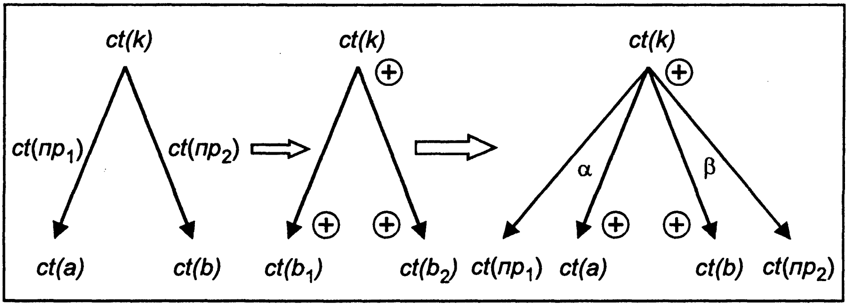


Рис. 4.14

7. Целевая установка:

$$\boldsymbol{ct(k)^+ = ct^+(a,\alpha)\cdot ct(np_1) + ct^+(b,\beta)\cdot ct(np_2) -}$$
$$\boldsymbol{- ct^+(a,\alpha)\cdot ct(np_1)\cdot ct^+(b,\beta)\cdot ct(np_2),}$$

где $ct^+(a,\alpha)$, $ct^+(b,\beta)$ – коэффициенты достоверности условий a и b, зависящие от коэффициентов приоритетности α и β.

Если воспользоваться абсолютными приростами аргументов, то задача обратных вычислений в данной постановке задачи принимает следующий вид:

$$\begin{cases} ct(k) + \Delta ct(k) = \\ = (ct(a) + \Delta ct(a))\cdot ct(np_1) + (ct(b) + \Delta ct(b))\cdot ct(np_2) - \\ -(ct(a) + \Delta ct(a))\cdot ct(np_1)\cdot (ct(b) + \Delta ct(b))\cdot ct(np_2), \\ \dfrac{\Delta ct(a)}{\Delta ct(b)} = \dfrac{\alpha}{\beta}, \end{cases}$$

где $\Delta ct(a)$, $\Delta ct(b)$ – приросты коэффициентов достоверности условий a и b.

Для решения данной задачи воспользуемся абсолютными приростами аргументов, т.е. решим задачу без предварительного расчета коэффициентов прироста. Тогда получим:

Обозначим

$$-\left(\frac{\alpha}{\beta}ct(np_1)ct(k)ct(np_2)+ct(a)ct(np_1)ct(np_2)-ct(np_2)-\frac{\alpha}{\beta}ct(np_2)\right)=\text{A};$$

$$ct(np_1)=\Pi_1;$$

$$ct(np_2)=\Pi_2;$$

$$ct(k)=\Pi_k;\; ct(a)=\Pi_a.$$

Тогда

$$\Delta ct(k)=\frac{1}{2\frac{\alpha}{\beta}\Pi_1\cdot\Pi_2}\left(\text{A}\pm\sqrt{\text{A}^2-4\frac{\alpha}{\beta}\Pi_1\Pi_2\;\Pi_a\Pi_k\Pi_1\Pi_2-\Pi_k\Pi_2+\Delta\Pi_1+\Pi_k+\Delta\Pi_k}\right);$$

$$\Delta\Pi_a=\frac{\alpha}{\beta}\Delta\Pi_k.$$

П р и м е р (рис. 4.15). $ct(a) = 0{,}5$; $ct(np_1) = 0{,}4$; $ct(k) = 0{,}6$; $ct(np_2) = 0{,}3$; $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$.

Прямая задача: $ct(a_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$; $ct(a_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$; $ct(b) = 0{,}2 + 0{,}18 - 0{,}2 \cdot 0{,}18 = 0{,}34$.

Задача обратных вычислений: повысить $ct(b)$ до 0,4.

$$\Delta ct(k)=\frac{0{,}73-\sqrt{0{,}53-0{,}04}}{0{,}36}=0{,}08;$$

$$\Delta ct(a)=1{,}5\cdot 0{,}08=0{,}12.$$

Таким образом, получен следующий результат:

$$ct(a)+\Delta ct(a)=0{,}5+0{,}12=0{,}62;$$

$$ct(k)+\Delta ct(k)=0{,}6+0{,}08=0{,}608.$$

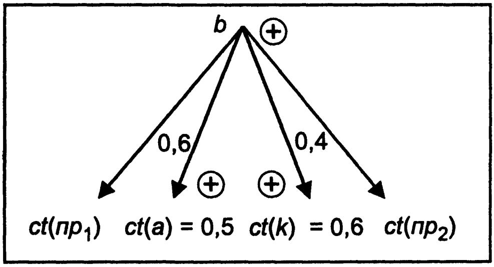


Рис. 4.15

Проверка. $ct(b)+\Delta ct(b)=(0,62\cdot 0,4)+(0,608\cdot 0,3)-$
$-(0,62\cdot 0,4)(0,608\cdot 0,3)=0,402\approx 0,4.$

8. Целевая установка:

$$\boldsymbol{ct(k)^{+}=ct^{+}(a,\alpha)\cdot ct(np_1)+ct^{-}(b,\beta)\cdot ct(np_2)-}$$
$$\boldsymbol{-ct^{+}(a,\alpha)\cdot ct(np_1)\cdot ct^{-}(b,\beta)\cdot ct(np_2).}$$

Обозначения прежние.
Задача обратных вычислений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} ct(k)+\Delta ct(k)= \\ =(ct(a)+\Delta ct(a))\cdot ct(np_1)+(ct(b)-\Delta ct(b))\cdot ct(np_2)- \\ -(ct(a)+\Delta ct(a))\cdot ct(np_1)\cdot(ct(b)-\Delta ct(b))\cdot ct(np_2), \\ \dfrac{\Delta ct(a)}{\Delta ct(b)}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решается она так же, как и предыдущая.

9. Целевая установка:

$$\boldsymbol{ct(k)^{+}=ct^{-}(a,\alpha)\cdot ct(np_1)+ct^{+}(b,\beta)\cdot ct(np_2)-}$$
$$\boldsymbol{-ct^{-}(a,\alpha)\cdot ct(np_1)\cdot ct^{+}(b,\beta)\cdot ct(np_2).}$$

Задача обратных вычислений запишется следующим образом:

$$\begin{cases} ct(k)+\Delta ct(k)= \\ =(ct(a)-\Delta ct(a))\cdot ct(np_1)+(ct(b)+\Delta ct(b))\cdot ct(np_2)- \\ -(ct(a)-\Delta ct(a))\cdot ct(np_1)\cdot(ct(b)+\Delta ct(b))\cdot ct(np_2), \\ \dfrac{\Delta ct(a)}{\Delta ct(b)}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Задача решается аналогично предыдущему.

10. Целевая установка:

$$\boldsymbol{ct(k)^{+} = ct^{-}(a,\alpha)\cdot ct(np_1) + ct^{-}(b,\beta)\cdot ct(np_2) -}$$
$$\boldsymbol{- ct^{-}(a,\alpha)\cdot ct(np_1)\cdot ct^{-}(b,\beta)\cdot ct(np_2).}$$

Задача обратных вычислений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} ct(k) + \Delta ct(k) = \\ = (ct(a) - \Delta ct(a))\cdot ct(np_1) + (ct(b) - \Delta ct(b))\cdot ct(np_2) - \\ -(ct(a) - \Delta ct(a))\cdot ct(np_1)\cdot (ct(b) - \Delta ct(b))\cdot ct(np_2), \\ \dfrac{\Delta ct(a)}{\Delta ct(b)} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Задача решается аналогично предыдущему.

Если перед лицом, формирующим решение, стоит задача снижения коэффициента достоверности заключения, то все целевые установки, представленные ранее, те же, за исключением того, что знак прироста функции меняется на противоположный. Принципиально не меняются также постановки в случае, если знаки коэффициентов достоверности условий различные или отрицательные.

В практике формирования решений довольно часто применяются заключения, поддерживаемые тремя правилами. В этом случае в задаче обратных вычислений следует учитывать три аргумента. Допустим, известно три правила:

Если a_1, то b, $ct(a_1) = \lambda_1$, $ct(np_1) = \lambda_2$.
Если a_2, то b, $ct(a_2) = \eta_1$, $ct(np_2) = \eta_2$.
Если a_3, то b, $ct(a_3) = \sigma_1$, $ct(np_3) = \sigma_2$.

Прямая задача решается по следующей формуле:

$$ct(b) = ct(b_1) + ct(b_2) + ct(b_3) - ct(b_1)ct(b_2) -$$
$$- ct(b_1)ct(b_3) - ct(b_2)ct(b_3) + ct(b_1)ct(b_2)ct(b_3),$$

где

$$ct(b_1) = ct(a_1) \cdot ct(np_1) = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$
$$ct(b_2) = ct(a_2) \cdot ct(np_2) = \eta_1 \cdot \eta_2,$$
$$ct(b_3) = ct(a_3) \cdot ct(np_3) = \sigma_1 \cdot \sigma_2,$$

$$ct(b) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \eta_1 \cdot \eta_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 -$$
$$-\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2.$$

Графически это представлено на рис. 4.16.

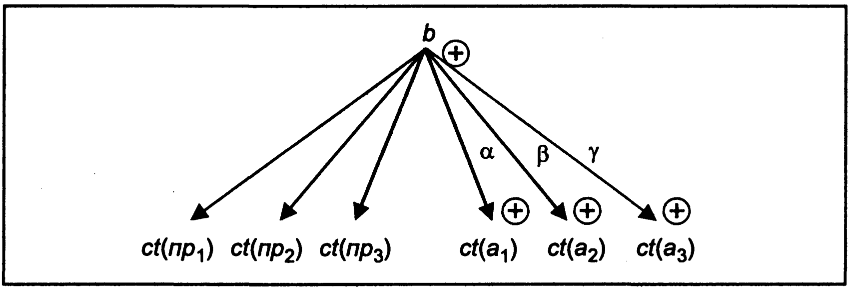


Рис. 4.16

Если целевая установка имеет вид:

$$ct^+(b) = \lambda_1^+(\alpha) \cdot \lambda_2 + \eta_1^+(\beta) \cdot \eta_2 + \sigma_1^+(\gamma) \cdot \sigma_2 - \lambda_1^+(\alpha) \cdot \lambda_2 \cdot \eta_1^+(\beta) \cdot \eta_2 -$$
$$-\lambda_1^+ \cdot (\alpha)\lambda_2 \cdot \sigma_1^+(\gamma) \cdot \sigma_2 - \eta_1^+(\beta) \cdot \eta_2 \cdot \sigma_1^+(\gamma) \cdot \sigma_2 + \lambda_1^+(\alpha) \cdot \lambda_2 \cdot \eta_1^+(\beta) \cdot \eta_2 \cdot \sigma_1^+(\gamma) \cdot \sigma_2,$$

то задача обратных вычислений запишется следующим образом:

$$\begin{cases} ct(b) + \Delta ct(b) = \\ = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\lambda_2 + (\eta_1 + \Delta\eta_1)\eta_2 + (\sigma_1 + \Delta\sigma_1)\sigma_2 - \\ -\lambda_2(\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\eta_2 \cdot (\eta_1 + \Delta\eta_1) - \lambda_2(\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\sigma_2(\sigma_1 + \Delta\sigma_1) - \\ -\eta_2(\eta_1 + \Delta\eta_1)\sigma_2(\sigma_1 + \Delta\sigma_1) + (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\lambda_2(\eta_1 + \Delta\eta_1)\eta_2(\sigma_1 + \Delta\sigma_1)\sigma_2, \\ \dfrac{\Delta\lambda_1}{\Delta\eta_1 + \Delta\sigma_1} = \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}, \\ \dfrac{\Delta\eta_1}{\Delta\lambda_1 + \Delta\sigma_1} = \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma}. \end{cases}$$

Так как здесь три аргумента, задача может быть решена двумя путями: либо с помощью процедуры свертки/развертки, либо с помощью системы с тремя уравнениями.

Если условие зависит от реляционного выражения, т.е. от функции принадлежности, определяемой нечетким множеством, то задача решается достаточно просто. Обратимся к рис. 4.7 и допустим, что в результате обратных вычислений на дереве вывода коэффициент достоверности условия *a* увеличился и стал равен 0,6. Так как это условие зависит от показателей *P* и *K*, находящихся в базе данных, необходимо определить их новые значения, которые обеспечат новый коэффициент достоверности *a*.

Коэффициент достоверности $ct(a)$ является нечетким числом, характеризуемым функцией принадлежности $\mu_A(\frac{P}{K})$, поэтому при условии, что функция принадлежности обратима, можно решать обратную задачу, превратив прямую функцию $y = \mu_A(\frac{P}{K})$ в обратную: $\frac{P}{K} = y^-$. Это позволит получить новое соотношение $\frac{P}{K}$ и приросты ΔP и ΔK в соответствии с целевыми установками лица, формирующего решение.

На рис. 4.7 представлено наиболее распространенное отношение «больше» (например, $P > K$). Новое соотношение $\frac{P}{K}$, которое соответствует новому значению коэффициента определенности, вычисляется следующим образом:

$$\frac{P}{K} = \mu_A^-(ct(a) \pm \Delta ct(a)),$$

где μ_A^- – обратная функция.

Допустим, коэффициент достоверности возрос с 0,4 до 0,6 (рис. 4.7). Обратившись к графическому представлению понятия «больше», отыскиваем на оси ординат точку 0,6, а затем соответствующую ей точку на оси абсцисс. Она равна 1,4. Это значит, что соотношение $\frac{P}{K}$ возросло с 1,3 до 1,4, и есть возможность поставить задачу обратных вычислений для поиска приростов ΔP и ΔK.

Величина $ct(a) \pm \Delta ct(a)$ может быть любой в диапазоне от -1 до 1, поэтому отыскание нового соотношения $\frac{P}{K}$ с помощью обратной функции $\mu_A^{-}(ct(a) \pm \Delta ct(a))$ удобнее на основе функции μ_A, заданной аналитически. Полезными здесь могут быть функции, представленные на рис. 4.17 – 4.20.

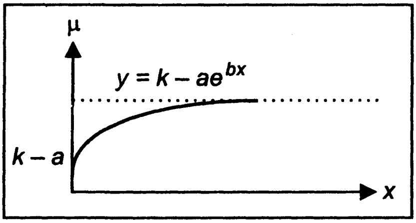


Рис. 4.17

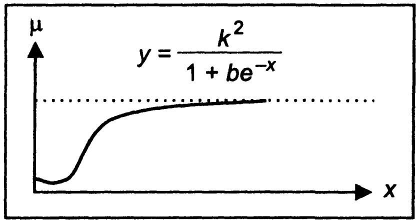


Рис. 4.18

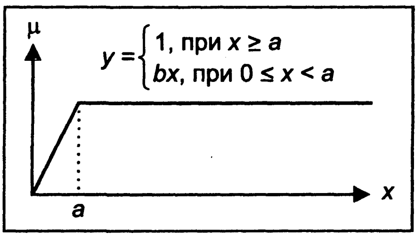


Рис. 4.19

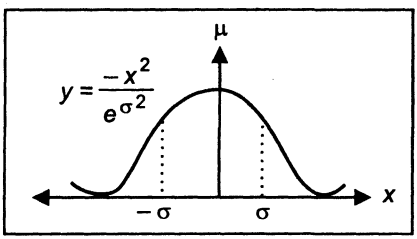


Рис. 4.20

Наличие аналитического представления функции принадлежности позволяет поставить задачу обратных вычислений, которая в соответствии с постановками детерминированных задач (см. гл. 2) запишется следующим образом:

$$y = \frac{P}{K}, \quad y^{\pm} = \frac{P^{\pm}(\alpha)}{K^{\pm}(\beta)}.$$

Если, считать, что лицо, формирующее решение, преследует цели, отражаемые установкой вида $y^{+} = \frac{P^{+}(\alpha)}{K^{-}(\beta)}$, то задача обратных вычислений примет вид

$$\begin{cases} y + \Delta y = \dfrac{P + \Delta P}{K - \Delta K}, \\ \dfrac{\Delta P}{\Delta K} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Здесь величина $y + \Delta y$ получена с помощью одной из функций принадлежности, аналитическое представление которой приведено на рис. 4.17 – 4.20.

Используя для решения индивидуальные коэффициенты прироста аргументов, получим:

$$P + \Delta P = k_1 P;$$

$$K - \Delta K = \frac{K}{k_2}.$$

Решая данную систему уравнений, получим

$$k_1 = \frac{\alpha + \beta y}{\beta y + \dfrac{\alpha y}{y + \Delta y}};$$

$$k_2 = \frac{y + \Delta y}{k_1 y}.$$

Достаточно часто возникает необходимость получения приростов аргументов, которые в сумме с базовой величиной коэффициента определенности выходят за рамки установленного диапазона [–1,1].

Для возвращения в требуемый диапазон можно либо уменьшить желаемый прирост коэффициента определенности главного заключения, либо уменьшить коэффициент определенности, который в результате обратных вычислений получился больше единицы или меньше минус единицы, приравнивая его единице или минус единице.

4.4. Комплексный пример обратных вычислений на дереве вывода

Обратимся к рис. 4.21, где графически представлено дерево вывода. Используем это дерево для сквозного примера обратных вычислений, основываясь на показателях базы данных, представленных в табл. 4.2 и 4.3. Основываясь на этих данных, а также пользуясь информацией, приведенной на рис. 4.21, в результате прямых вычислений получен коэффициент определенности гипотезы *K*7, равный 0,2. Необходимо узнать, какие меры следует предпринять для того, чтобы этот коэффициент повысился до 0,4.

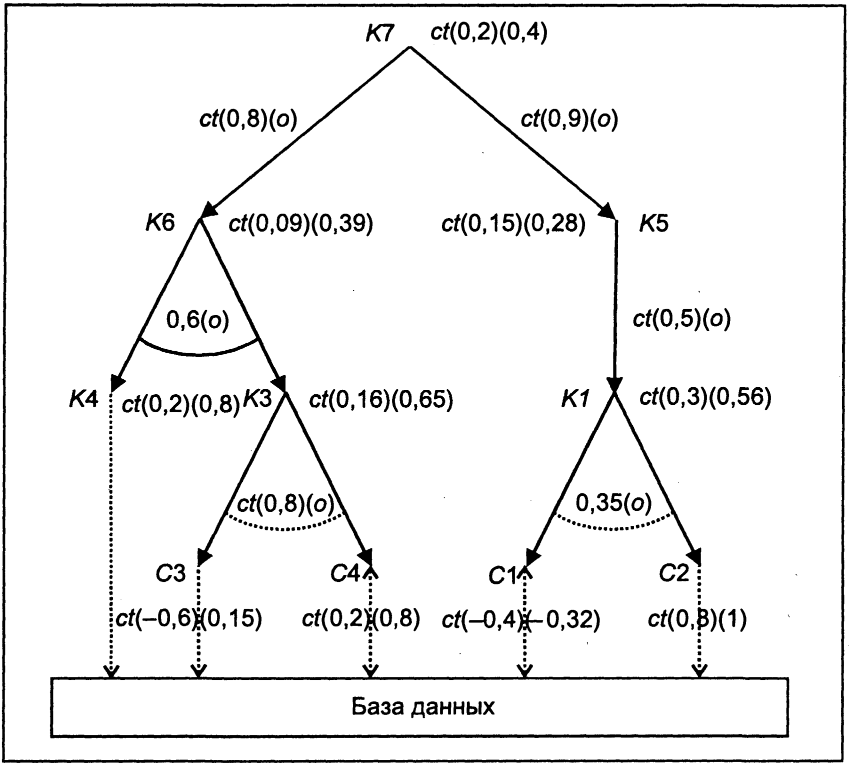


Рис. 4.21

На рис. 4.21 использованы следующие обозначения узлов дерева:

*К*7 (гипотеза или главное заключение) – ожидается рост деловой активности и рост объемов собранных налогов;

*К*6 – возрастет стабильность в обществе;

*К*5 – возрастает внешнеторговый оборот;

*К*4 – возрастает ВВП;

*К*3 – стабилизируются процентные ставки;

*К*1 – возрастает индекс товарности;

*С*4 – произойдет изменение структуры потребительского спроса в сторону увеличения экспорта;

*С*3 – уровень инфляции не превысит 20%;

*С*2 – возрастает доля импортируемых товаров и услуг в общем объеме товаров и услуг;

*С*1 – возрастает доля экспортируемых товаров и услуг в общем объеме товаров и услуг.

Для оценки терминальных вершин используются следующие реляционные выражения и формулы для расчетов.

1. В качестве реляционного выражения для условия *К*4 служит неравенство

$$\text{ВВП}_1 > \text{ВВП}_0,$$

где ВВП_1, ВВП_0 – валовой внутренний продукт, полученный в отчетном и базисном периодах.

Для расчета ВВП используется формула:

$$\text{ВВП} = A + B + C + Д,$$

где A – потребительские расходы населения;

B – валовые частные инвестиции в экономику;

C – государственные закупки товаров и услуг;

$Д$ – чистый экспорт (разность между экспортом и импортом).

Введем функцию принадлежности вида

$$\mu_{\text{превышение}}(\%) = \frac{0}{0{,}1};\ \frac{0{,}1}{0{,}3};\ \frac{0{,}2}{0{,}5};\ \frac{0{,}3}{1};\ \frac{0{,}5}{2};\ \frac{0{,}8}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5},$$

которая графически представлена на рис. 4.22.

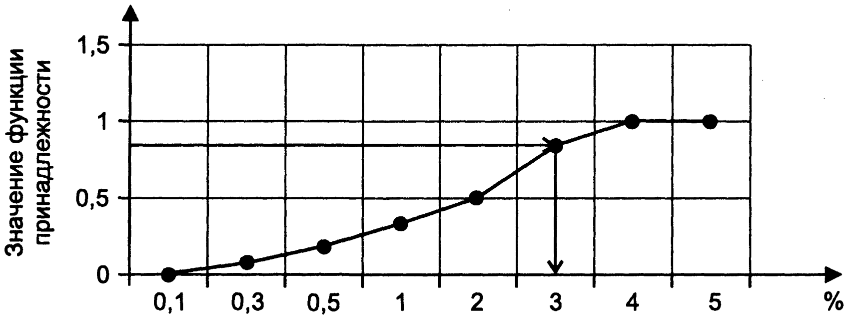


Рис. 4.22

2. Условие $C3$ связано с уровнем инфляции, который не должен быть выше указанного:

$$I_1 < i < I_2,$$

где I_1, I_2 – нижний и верхний уровни инфляции.

Вызывающим наибольшее доверие является диапазон $1 < i < 1,2$.

Уровень инфляции подсчитывается следующим образом:

$$i = \frac{I_1}{I_0},$$

где I_0, I_1 – индекс инфляции в базисном и отчетном периодах.

Для оценки уровня инфляции введем нечеткое множество (рис. 4.23):

$$\mu_{\text{около границы}}(i) = \frac{0,4}{0,9}; \frac{1}{1}; \frac{0,9}{1,01}; \frac{0,8}{1,05}; \frac{0,6}{1,1}; \frac{0,2}{1,15}; \frac{0}{1,2}.$$

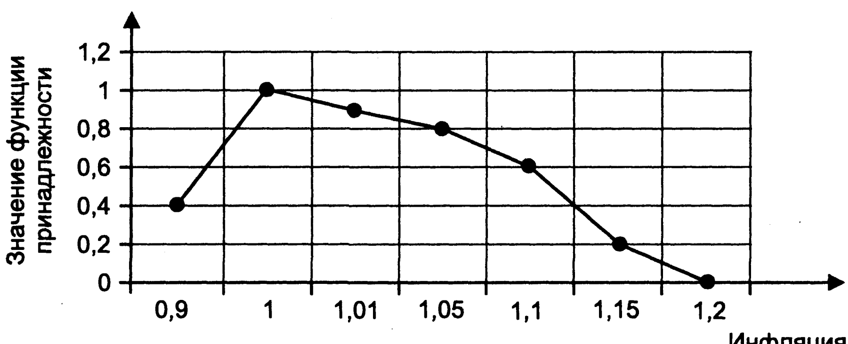


Рис. 4.23

3. Для условий $C1$ и $C2$ можно воспользоваться следующими реляционными выражениями:

для $C1$: $d_э > 1$,
для $C2$: $d_и > 1$,

где $d_э$, $d_и$ – приросты соответственно экспортируемых и импортируемых товаров и услуг в общем объеме потребляемых товаров и услуг.

Для их расчета используются следующие формулы:

$$d_э = \frac{V_1^э}{V_0^э},\quad d_и = \frac{V_1^и}{V_0^и},$$

где $V_1^э, V_1^и$ – объемы соответственно экспортируемой и импортируемой продукции в отчетном периоде;

$V_0^э, V_0^и$ – объемы соответственно экспортируемой и импортируемой продукции в базином периоде.

Введем нечеткие множества:

$$\mu_{\text{экспорт около единицы}}(d_э) = \frac{0,6}{0,7}; \frac{0,9}{0,8}; \frac{1}{0,9}; \frac{1}{1}; \frac{1}{1,1}; \frac{0,6}{1,4};$$

$$M_{\text{импорт около единицы}}(d_и) = \frac{0,3}{0,5}; \frac{0,6}{0,7}; \frac{0,7}{0,9}; \frac{1}{1}; \frac{1}{1,2}; \frac{0,8}{1,3}; \frac{0,7}{1,4},$$

что графически представится так, как это показано на рис. 4.24 и 4.25.

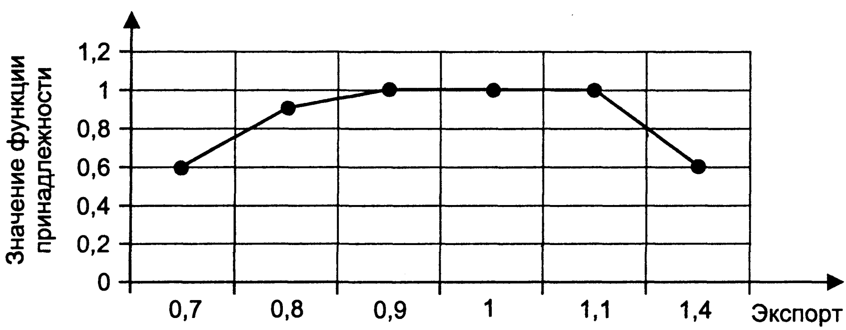


Рис. 4.24

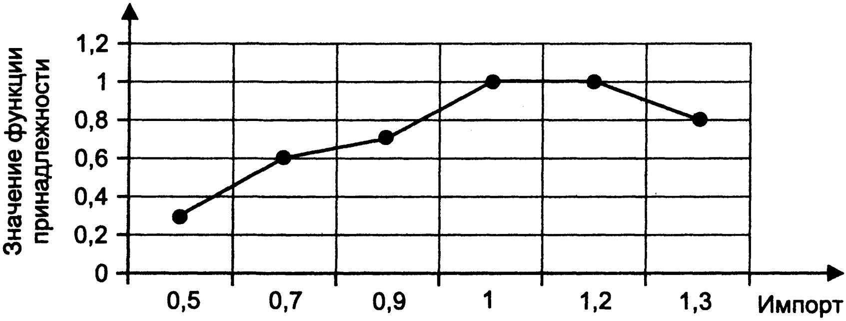


Рис. 4.25

Для решения задачи используются исходные данные, представленные в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Значения показателей базы данных

Наименование исходного показателя	Условное обозначение	Значение показателя в периоде	
		базисном	отчетном
Потребительские расходы населения	A	20	22,05
Валовые частные инвестиции в экономику	B	5	5,1
Государственные закупки товаров и услуг	C	30	30,2
Чистый экспорт	$Д$	10	10,02
Индекс инфляции	I	1,21	1,11
Объем экспортируемой продукции	$V^э$	100	70
Объем импортируемой продукции	$V^и$	80	96

Прямой расчет (снизу вверх)

Результаты расчетов на дереве вывода (см. рис. 4.21) указаны рядом с вершиной дерева.

Для условий $C1$ и $C2$ рассчитаем индексы их приростов:

$$d_э = \frac{V_1^э}{V_0^э} = \frac{70}{100} = 0,7, \quad d_и = \frac{V_1^и}{V_0^и} = \frac{96}{80} = 1,2.$$

Эти индексы позволяют установить коэффициенты определенности с помощью соответствующей функции принадлежности. В связи с тем, что определяемое реляционным выражением условие для $d_э$ не выполняется (показатель не больше единицы), коэффициент определенности для $C1$ будет равен

$$ct(C1) = r \cdot \mu(0,7) - 1 = 1 \cdot 0,6 - 1 = -0,4.$$

Для условия $C2$ коэффициент

$$ct(C1) = \mu(1,2) = 1.$$

Условие $C3$ характеризует динамику инфляции

$$i = \frac{1,11}{1,2} = 0,9.$$

Так как i не больше единицы, коэффициент достоверности, как и у условия $C1$, будет отрицательным:

$$ct(C3) = r \cdot \mu(0,9) - 1 = 1 \cdot 0,4 - 1 = -0,6.$$

Будем считать, что коэффициент достоверности для $C4$ не зависит от показателей базы данных и равен 0,2.

Осталось определить достоверность условия $K4$. Предварительно рассчитаем

$$\frac{ВВП_1}{ВВП_0} = \frac{20,05 + 5,1 + 30,2 + 10,02}{20 + 5 + 30 + 10} = 1,005 \ (0,5\%).$$

Тогда согласно функции принадлежности, определяющей достоверность $K4$, получим:

$$ct(K4) = \mu(0,05) = 0,2.$$

Теперь выполним прямые расчеты на дереве вывода.

Для вершины $K1$:

$$ct(K1) = \max\ (ct(C1), ct(C2))\ ct(np) = 0,8 \cdot 0,35 = 0,3.$$

Для вершины $K5$:

$$ct(K5) = ct(K1) \cdot ct(np) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15.$$

Заключение $K3$ зависит от двух условий, связанных союзом ИЛИ. Вычисления будут следующими:

$$ct(K3) = \max\ (ct(C3), ct(C4)) ct(np) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16.$$

Так же рассчитывается и коэффициент $K6$, с той лишь разницей, что условия связаны союзом И:

$$ct(K6) = \min\,(ct(K4),\, ct(K3))ct(np) = 0{,}16 \cdot 0{,}6 = 0{,}09.$$

Так как главное заключение поддерживается двумя правилами, получим:

$$ct(K7) = ct(K7_1) + ct(K7_2) - ct(K7_1) \cdot ct(K7_2),$$

где $ct(K7_1) = ct(K6) \cdot ct(np) = 0{,}09 \cdot 0{,}8 = 0{,}072;$

$ct(K7_2) = ct(K5) \cdot ct(np) = 0{,}15 \cdot 0{,}9 = 0{,}14.$

Результат прямых вычислений следующий:

$$ct(K7) = 0{,}072 + 0{,}14 - 0{,}072 \cdot 0{,}14 = 0{,}2.$$

Обратные вычисления (сверху вниз)

Результаты вычислений указаны на рис. 4.21 в скобках.

Допустим, коэффициент достоверности главного заключения необходимо повысить до 0,4. Вначале рассчитаем, чему должны равняться приросты для $K5$ и $K6$. Обозначив через

$$\lambda_1 = ct(K6),\ \lambda_2 = ct(np1),\ \eta_1 = ct(K5),\ \eta_2 = ct(np2)$$

и считая, что целевая установка лица, принимающего решение, имеет вид

$$ct(K7)^+ = \lambda_1^+(\alpha)\lambda_2 + \eta_1^+(\beta)\eta_2 - \lambda_1^+(\alpha)\lambda_2 \cdot \eta_1^+(\beta)\eta_2,$$

приходим, как и ранее, к системе уравнений:

$$\begin{cases} ct(K7) + \Delta ct(K7) = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\lambda_2 + (\eta_1 + \Delta\eta_1)\eta_2 - (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)\lambda_2 \cdot (\eta_1 + \Delta\eta_1)\eta_2, \\ \dfrac{\Delta\lambda_1}{\Delta\eta_1} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Если считать, что $\alpha = 0{,}7$, а $\beta = 0{,}3$ и при этом (см. рис. 4.21)

$$\lambda_1 = ct(K6) = 0{,}09;\ \lambda_2 = ct(np1) = 0{,}8,$$

$$\eta_1 = ct(K5) = 0{,}15;\ \eta_2 = ct(np2) = 0{,}9,$$

то получим следующее решение обратной задачи:

$$\Delta\eta_1 = 0{,}13;\ \ \Delta\lambda_1 = 0{,}3.$$

Тогда ответ будет следующим:

$$ct(K6)+\Delta ct(K6)=0,09+0,3=0,39,$$
$$ct(K5)+\Delta ct(K5)=0,15+0,13=0,28.$$

Проверка. $ct(K7)+\Delta ct(K7)=0,39\cdot 0,8+0,28\cdot 0,9-$
$-0,39\cdot 0,8\cdot 0,28\cdot 0,9=0,46\approx 0,4.$

Будем считать, что такая точность вполне приемлема.

Прирост вершины $K5$ определяет прирост вершины $K1$ следующим образом:

$$ct(K1)+\Delta ct(K1)=\frac{ct(K5)+\Delta ct(K5)}{ct(np)}=\frac{0,28}{0,5}=0,56.$$

В свою очередь, прирост вершины $K1$ определяет приросты для условий $C1$ и $C2$:

$$ct_{\max}(a)+\Delta ct_{\max}(a)=\frac{ct(K1)+\Delta ct(K1)}{ct(np)}=\frac{0,56}{0,35}=1,6\approx 1,$$
$$ct(C2)+\Delta ct(C2)=1.$$

Второе условие ($C1$) – увеличим с помощью коэффициента, равного

$$\frac{ct(C2)+\Delta ct(C2)}{ct(C2)}=\frac{1}{0,8}=1,25.$$

Отсюда следует, что

$$ct(C1)+\Delta ct(C1)=\frac{-0,4}{1,25}=-0,32.$$

Прирост вершины $K6$ определяет приросты для вершин $K4$ и $K3$:

$$ct_{\min}(a)+\Delta ct_{\min}(a)=\frac{ct(K6)+\Delta ct(K6)}{ct(np)}=\frac{0,39}{0,6}=0,65,$$
$$ct(K3)+\Delta ct(K3)=0,65.$$

Коэффициент для второго условия равен:

$$ct(K4) + \Delta ct(K4) = \frac{ct(K3) + \Delta ct(K3)}{ct(K3)} ct(K4) = \frac{0,65}{0,16} \cdot 0,2 = 0,8.$$

Заключение $K3$ зависит от двух условий, а именно $C3$ и $C4$, связанных союзом ИЛИ. Для $C3$ получим:

$$ct_{\max}(a) + \Delta ct_{\max}(a) = \frac{ct(K3) + \Delta ct(K3)}{ct(C4)} = \frac{0,65}{0,8} = 0,8,$$

$$ct(C4)\Delta ct(C4) = 0,8.$$

Коэффициент для условия $C3$ равен:

$$ct(C3) + \Delta ct(C3) = \frac{ct(C3)}{\dfrac{ct(C4) + \Delta ct(C4)}{ct(C4)}} = \frac{-0,6}{4} = -0,15.$$

Обратные вычисления на дереве вывода закончены. Их результаты приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Результаты прямых и обратных точечных вычислений коэффициентов определенности вершин дерева вывода

Обозначение узла дерева	Результаты вычислений	
	прямых	обратных
$K7$	0,20	0,40
$K6$	0,09	0,39
$K5$	0,15	0,28
$K4$	0,20	0,80
$K3$	0,16	0,65
$K1$	0,30	0,56
$C3$	– 0,60	– 0,15
$C4$	0,20	0,80
$C2$	0,80	1,00
$C1$	– 0,40	– 0,32

Далее на основе приростов значений терминальных вершин ведется расчет приростов показателей, находящихся в базе данных. С базой данных связаны следующие вершины: *К*4, *С*1, *С*2, *С*3 и *С*4.

Вершина *К*4 зависит от четырех показателей: *А*, *В*, *С* и *Д*, которые в сумме отражают ВВП. Какое увеличение ВВП обеспечит необходимый прирост коэффициента определенности главного заключения *К*7, укажет функция принадлежности, связывающая условие *К*4 с базой данных. Новое значение *К*4 равно 0,8.

Обратимся к рис. 4.22 и определим новое значение ВВП. При коэффициенте определенности 0,8 превышение $ВВП_1$ по сравнению с $ВВП_0$ должно быть равно 3%. Отсюда абсолютная величина ВВП равна:

$$ВВП + \Delta ВВП = 65{,}37 \cdot 1{,}03 = 67{,}33.$$

Приросты для составляющих ВВП определим распределением полученного прироста пропорционально коэффициентам относительной важности каждого из аргументов. Если целевая установка имеет вид

$$ВВП^+ = А^+(\alpha) + В^+(\beta) + С^+(\gamma) + Д^+(\sigma)$$

и при этом $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}2$; $\gamma = 0{,}4$; $\sigma = 0{,}1$,
то получим: $\Delta ВВП = 2{,}37$; $\Delta А = 0{,}3 \cdot 2{,}37 = 0{,}71$; $\Delta В = 0{,}2 \cdot 2{,}37 = 0{,}47$;

$$\Delta С = 0{,}4 \cdot 2{,}37 = 0{,}94; \ \Delta Д = 0{,}1 \cdot 2{,}37 = 0{,}24.$$

Ответ будет следующим:

А + $\Delta А$ = 20,05 + 0,71 = 20,76; В + $\Delta В$ = 5,1 +0,47 = 5,57;
С + $\Delta С$ = 30,2 + 0,94 = 31,14; Д + $\Delta Д$ = 10,02 + 0,24 = 10,26;
ВВП + ΔВВП = 67,73 $\approx$ 67,33.

Обратные вычисления отрицательных коэффициентов определенности требуют выполнения дополнительной операции, которая заключается в переводе отрицательного числа в положительное, как того требует функция принадлежности.

Для вершины *С*3 имеем:

$$P = 1 - 0{,}15 = 0{,}85,$$

$$i = \mu^-(P) = \mu^-(0{,}85) = 1{,}01,$$

где $\mu^-(P)$ – обратная функция принадлежности.

Новое значение уровня инфляции:

$$I_1 = \frac{i}{\mu^-(P)} = \frac{1,09}{1,01} = 1,08.$$

Остальные терминальные вершины обрабатываются аналогично. Результаты вычислений приведены в табл. 4.4

Таблица 4.4

Результаты прямых и обратных вычислений показателей из базы данных

Обозначение узла дерева	Значение в отчетном периоде	Результаты обратных вычислений
А	20,05	20,76
В	5,10	5,57
С	30,20	31,14
Д	10,02	10,26
ВВП	65,37	67,33

4.5. Поддержка дерева вывода обратными вычислениями на дереве целей

В разд. 4.4 рассмотрен комплексный пример, в котором терминальные вершины поддерживались простейшими реляционными алгебраическими выражениями, элементы которых определялись с помощью формул. Исходные значения показателей, используемые для расчета, находились в базе данных.

Развитая система формирования решений синтезирует как детерминированные зависимости, так и правила, характеризуемые некоторой степенью неопределенности. Поэтому элементы расчетных формул детализируются так же, как в гл. 3, трансформируясь в дерево целей. Это позволяет формировать конкретные решения. Например, на вопрос: «Какие следует предпринять действия, чтобы деловая активность возросла с 0,3 до 0,7?» ответ вида: «Для этого следует обеспечить рост ВВП с 1,07 до 1,1 и изменить индекс инфляции с 1,11 до 1,09» является слишком общим. Полезным решение будет тогда, когда указанные показатели конкретизированы. Для этого показатель «величина ВВП» должен трансформироваться в цель: «Увеличить ВВП до 1,1» и далее эта цель должна быть представлена в виде дерева целей с таким числом уровней, которое укажет на необходимые мероприятия, действия или процессы.

Таким образом, обратные вычисления выполняются в две стадии.

1. Вычисляются приросты коэффициентов определенности вершин дерева вывода.

2. Вычисляются приросты показателей дерева целей на основе приростов показателей терминальных вершин.

Возможен и обратный процесс: вначале вычисляются приросты вершин дерева целей, а затем – приросты дерева вывода и показателей базы данных.

Глава 5

ОБРАТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

5.1. Изменение объема параллелепипеда

Вначале рассмотрим последовательность операций решения задач обратных вычислений с помощью индивидуальных коэффициентов, а затем – без указания приоритетности целей.

Допустим, прямоугольный параллелепипед срезан сверху параболоидом вращения с параметром p (рис. 5.1). Вершина параболоида совпадает с центром верхнего основания, ось вертикальна.

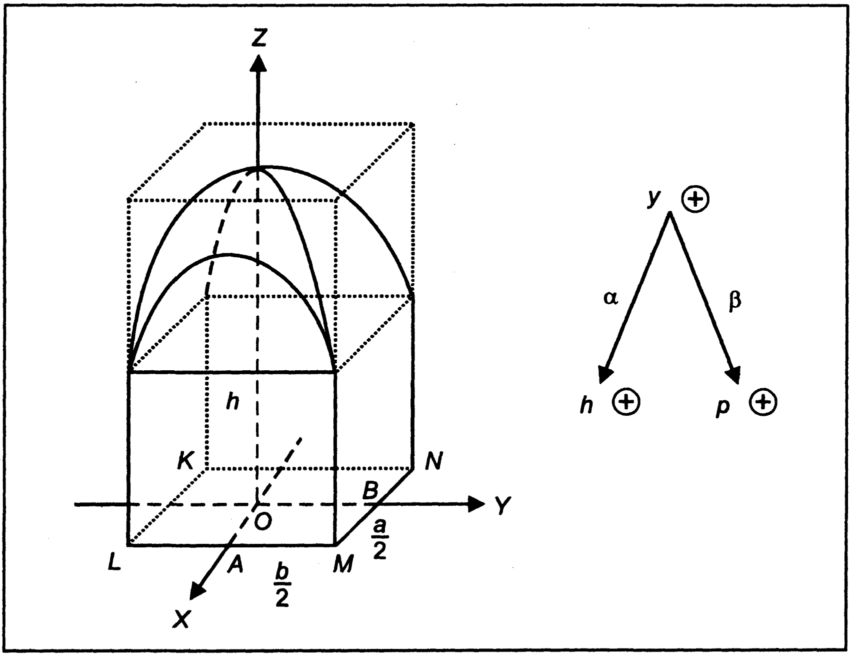


Рис. 5.1

Прямая задача: определить объем V образовавшегося тела, если стороны его основания равны a и b, а высота равна h. Уравнение параболоида:

$$z = h - \frac{x^2 + y^2}{2p}.$$

Объем образовавшегося тела:

$$V = 4\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}}(h - \frac{x^2 + y^2}{2p})dydx.$$

5.1.1.
Решение задачи с помощью индивидуальных коэффициентов прироста

Необходимо увеличить объем V образовавшегося тела за счет увеличения высоты h тела и увеличения объема параллелепипеда (увеличения параметра p). Пропорции прироста регулируются коэффициентами относительной важности: для высоты h коэффициентом α – ($h(\alpha)$), а для параметра p – коэффициентом β – ($p(\beta)$). Целевая установка при этом выглядит следующим образом:

$$z^+ = h^+(\alpha) - \frac{x^2 + y^2}{2p^+(\beta)}.$$

Введем, как и ранее, индивидуальные коэффициенты приростов:

$$h + \Delta h = k_1 h,$$

$$p + \Delta p = k_2 p.$$

Если через $\Delta V(k_1)$ и $\Delta V(k_2)$ обозначить приросты объемов, которые будут получены за счет использования коэффициентов k_1 и k_2, то можно записать:

$$\Delta V(k_1) = V(k_1) - V, \ \Delta V(k_2) = V(k_2) - V,$$

где $\Delta V(k_1)$, $\Delta V(k_2)$ – приросты объемов срезанного параллелепипеда, получаемого за счет применения коэффициентов k_1 и k_2 соответственно;

$V(k_1)$, $V(k_2)$ – новые объемы срезанного параллелепипеда, получаемого за счет использования коэффициентов k_1 и k_2 соответственно;

V – начальный объем срезанного параллелепипеда.

В общем виде задачу обратных вычислений можно записать:

$$\begin{cases} \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \bar{V}, \\ \dfrac{\Delta V(k_1)}{\Delta V(k_2)} = \dfrac{\alpha(p_1)}{\beta(p_2)}, \end{cases}$$

где p_i – параметр функции $f(x, y)$;

$\bar{V}$ – искомый объем;

α, β – коэффициенты приоритетности аргументов p_1 и p_2.

Для рассматриваемой функции задача при условии применения индивидуальных коэффициентов прироста аргументов примет вид

$$\begin{cases} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (k_1 h - \dfrac{x^2+y^2}{2pk_2})dydx = \bar{V}, \\ \dfrac{\Delta V(k_1)}{\Delta V(k_2)} = \dfrac{\alpha(h)}{\beta(p)}, \end{cases}$$

где $\bar{V}$ – новый (заданный) объем срезанного параллелепипеда;

$\alpha(h), \beta(p)$ – коэффициенты относительной важности аргументов h и p.

Найдем из первого уравнения какой-либо из искомых коэффициентов, например k_1. Заметим, что вследствие симметрии можно искать учетверенный интеграл на области OAMB:

$$\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (k_1 h - \frac{x^2+y^2}{2pk_2})dydx = 4\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \int\limits_0^{\frac{b}{2}} (k_1 h - \frac{x^2+y^2}{2pk_2})dydx = 4\int\limits_0^{\frac{a}{2}} (k_1 hy - \frac{x^2 y}{2pk_2} - \frac{y^3}{6pk_2})\Bigg|_0^{\frac{b}{2}} dx =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{a}{2}} (\frac{bk_1 h}{2} - \frac{bx^2}{4pk_2} - \frac{b^3}{48pk_2})dx = 4(\frac{bk_1 hx}{2} - \frac{bx^3}{12pk_2} - \frac{b^3 x}{48pk_2})\Bigg|_0^{\frac{a}{2}} = 4(\frac{bk_1 ha}{4} - \frac{ba^3}{96pk_2} - \frac{b^3 a}{96pk_2}) =$$

$$= abhk_1 - \frac{ab(a^2+b^2)}{24pk_2} = \bar{V}.$$

Введем обозначения: $\frac{ab(a^2+b^2)}{24p}=L$, $abh=T$, $k_1T=\frac{L}{k_2}+\bar{V}$ и запишем

$$k_1=\frac{\frac{L}{k_2}+\bar{V}}{T}.$$

Прежде чем воспользоваться вторым уравнением, определим, чему равны числитель и знаменатель. Для этого предварительно определим, чему равны объемы, получаемые за счет применения коэффициентов k_1 и k_2, обозначенные как $V(k_1)$ и $V(k_2)$. Первый из них равен:

$$V(k_1)=4\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}}(k_1h-\frac{x^2+y^2}{2p})dydx=4\int_0^{\frac{a}{2}}(k_1hy-\frac{x^2y}{2p}-\frac{y^3}{6p})_0^{\frac{b}{2}}dx=4\int_0^{\frac{a}{2}}(\frac{bk_1h}{2}-\frac{bx^2}{4p}-\frac{b^3}{48p})dx=$$

$$=4(\frac{bk_1hx}{2}-\frac{bx^3}{12p}-\frac{b^3x}{48p})\Big|_0^{\frac{a}{2}}=abhk_1-\frac{ab(a^2+b^2)}{24p}=Tk_1-L.$$

Отсюда прирост, зависящий от k_1, равен:

$$\Delta V(k_1)=Tk_1-L-T+L=Tk_1-T.$$

Аналогично рассчитаем объем, получаемый за счет применения k_2:

$$V(k_2)=4\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}}(h-\frac{x^2+y^2}{2pk_2})dydx=4\int_0^{\frac{a}{2}}(hy-\frac{x^2y}{2pk_2}-\frac{y^3}{6pk_2})\Big|_0^{\frac{b}{2}}dx=4\int_0^{\frac{a}{2}}(\frac{bh}{2}-\frac{bx^2}{4pk_2}-\frac{b^3}{48pk_2})dx=$$

$$=4(\frac{bhx}{2}-\frac{bx^3}{12pk_2}-\frac{b^3x}{48pk_2})\Big|_0^{\frac{a}{2}}=abh-\frac{ba^3}{24pk_2}-\frac{ab^3}{24pk_2}=abh-\frac{ab(a^2+b^2)}{24pk_2}=T-\frac{L}{k_2}.$$

Соответствующий прирост

$$\Delta V(_2)=T-\frac{L}{k_2}-T+L=L-\frac{L}{k_2}.$$

Теперь можно воспользоваться вторым уравнением из системы уравнений для отыскания коэффициента k_2:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\Delta V(k_1)}{\Delta V(k_2)}=\frac{Tk_1-T}{L-\frac{L}{k_2}},$$

так как $k_1 = \dfrac{\dfrac{L}{k_2} + \bar{V}}{T}$, получим $k_2 = \dfrac{L}{\alpha L + \beta T - \beta \bar{V}}$.

Пример (рис. 5.1): $a = 1$; $b = 2$; $h = 4$; $p = 1$; $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$, $L = 0{,}42$; $T = 8$.

Исходный объем равен $T - L = 8 - 0{,}42 = 7{,}58$.

Допустим, желаемый объем равен 8,58, т.е. $\bar{V} = 8{,}58$.

Тогда $k_2 = \dfrac{0{,}42}{0{,}29 + 2{,}4 - 2{,}6} = 4{,}7$; $k_1 = \dfrac{\dfrac{0{,}42}{4{,}7} + 8{,}58}{8} = 1{,}08$.

Проверка. $abhk_1 - \dfrac{L}{k_1} = Tk_1 - \dfrac{L}{k_2} = 8 \cdot 1{,}08 - \dfrac{0{,}42}{4{,}7} = 8{,}55 \approx 8{,}58$.

Практический интерес представляют все целевые установки, рассмотренные в гл. 2. В первую очередь:

$$z^+ = h^-(\alpha) - \frac{x^2 + y^2}{2p^+(\beta)}; \quad z^+ = h^+(\alpha) - \frac{x^2 + y^2}{2p^-(\beta)};$$

$$z^- = h^-(\alpha) - \frac{x^2 + y^2}{2p^+(\beta)}; \quad z^- = h^-(\alpha) - \frac{x^2 + y^2}{2p^-(\beta)}.$$

5.1.2.
Решение задач без указания приоритетов целей

Допустим, коэффициенты относительной важности целей указать невозможно или же они несущественны. Тогда можно отыскать такой коэффициент k, который, будучи умноженный на p и h, даст искомый прирост объема.

Из предыдущего варианта решения задачи известна функция, с помощью которой можно подсчитать объем. Она имеет вид

$$Tk_1 - \frac{L}{k_2} = \bar{V},$$

так как $k_1 = k_2 = k$; поэтому получим:

$$Tk^2 - \bar{V}k - L = 0;$$

$$k = \frac{\bar{V} + \sqrt{\bar{V}_2 + 4TL}}{2T}.$$

Пример: $a = 1$; $b = 2$; $h = 4$; $p = 1$; $\bar{V} = 8{,}58$;
$V + \Delta V = 8{,}58$; $V = 7{,}58$.

Тогда: $T = abh = 8$; $L = \frac{ab(a^2 + b^2)}{24p} = \frac{1 \cdot 2(1+4)}{24 \cdot 1} = \frac{10}{24} = 0{,}42$;

$$k = \frac{8{,}58 + \sqrt{73{,}6 + 4 \cdot 8 \cdot 0{,}42}}{2 \cdot 8} = 1{,}12.$$

Проверка. $Tk - \frac{L}{k} = 8 \cdot 1{,}12 - \frac{0{,}42}{1{,}12} = 8{,}95 - 0{,}375 = 8{,}575 \approx 8{,}58.$

5.2. Обратные вычисления на дифференциальных уравнениях первого порядка

Вначале рассмотрим прямую задачу.

Для моста строится каменный бык высотой 12 м с круговыми горизонтальными сечениями. Бык рассчитан на нагрузку $p = 90$ т (помимо собственного веса). Плотность материала $\gamma = 2{,}5 \frac{\text{т}}{\text{м}^3}$. Допустимое давление составляет $k = 300 \frac{\text{т}}{\text{м}^2}$. Найти площади верхнего и нижнего оснований (рис. 5.2).

Решение прямой задачи. Площадь s_0, м^2, верхнего основания при допустимом давлении $k = 300 \frac{\text{т}}{\text{м}^2}$ может выдержать нагрузку ks_0, а по условию $ks_0 = p$. Следовательно,

$$s_0 = \frac{p}{k} = \frac{90}{300} = 0{,}3.$$

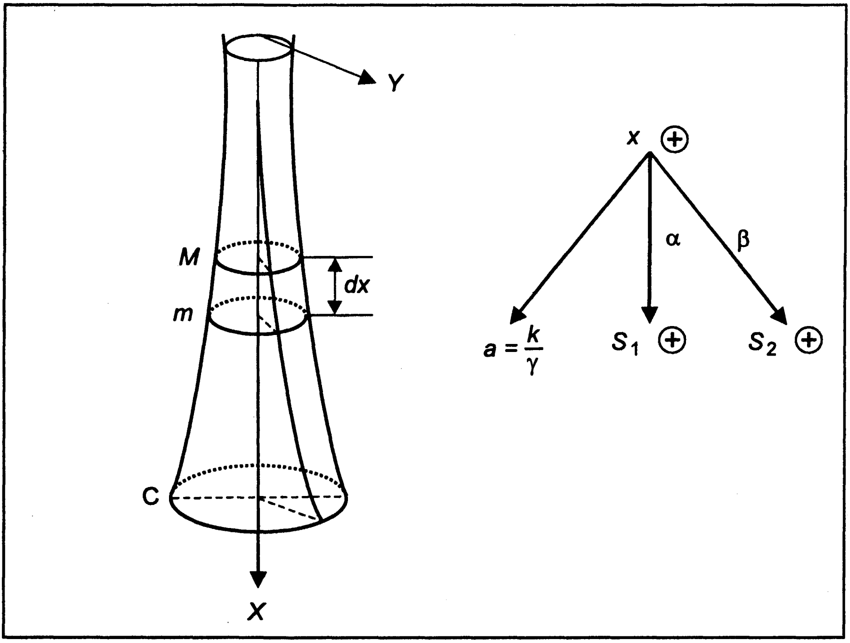


Рис. 5.2

Обозначив через x расстояние сечения s от верхнего основания, можно выделить бесконечно малый горизонтальный слой. Площадь его нижнего основания превышает площадь его верхнего основания на ds. Поэтому у нижнего основания предельная нагрузка больше на величину $\gamma s dx$. Получается дифференциальное уравнение: $k ds = \gamma s dx$:

Разделив переменные и интегрируя при начальных условиях

$x = 0, s = s_0$, можно получить $\int_{s_0}^{x} \frac{ds_1}{s} = \frac{\gamma}{k}\int_{0}^{x} dx$, откуда имеем $\ln\frac{s_1}{s_0} = \frac{\gamma}{k}x$.

Чтобы найти площадь нижнего основания, необходимо подставить $x = 12$ при $s_0 = 0{,}3$; $\gamma = 2{,}5$; $k = 300\frac{\text{т}}{\text{м}^2}$. Переходя к десятичным логарифмам, получим $\lg\frac{s_1}{0{,}3} = \text{M}\frac{2{,}5}{300}12$, где М – модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным, М = 0,43429, откуда $s_1 = 0{,}33$.

З а д а ч а о б р а т н ы х в ы ч и с л е н и й. Известны площади нижнего s_1 и верхнего s_0 оснований каменного быка. Обозначим через x высоту моста. Необходимо определить новые s_1 и s_0, если высота моста изменилась на величину Δx. Остальные данные прежние. Запишем, чему равна высота моста:

$$x = \frac{k}{\gamma} \ln \frac{s_1}{s_0}.$$

Допустим, целевая установка, представленная графически на рис. 5.2, имеет вид

$$x^+ = \frac{k}{\gamma} \ln \frac{s_1^+(\alpha)}{s_0^+(\beta)}.$$

Введем индивидуальные коэффициенты приростов аргументов:

$$s_1 + \Delta s_1 = k_1 s_1,$$

$$s_0 + \Delta s_0 = k_2 s_0.$$

Это позволяет составить обычную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{k_1 s_1 - \Delta s_1}{k_2 s_0 - \Delta s_0} = \dfrac{\alpha}{\beta}, \\ x + \Delta x = a \ln \dfrac{k_1 s_1}{k_2 s_0}. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, получим

$$k_1 = \frac{\alpha k_2 s_0 - \alpha s_0 + \beta s_1}{\beta s_1},$$

$$k_2 = \frac{\beta s_1 - \alpha s_0}{(\beta y - \alpha) s_0};$$

$$y = \frac{k_1 s_1}{k_2 s_2}.$$

П р и м е р: $x = 12$; $\Delta x = 3$; $a = 120$; $s_0 = 0{,}3$; $s_1 = 0{,}33$; $\alpha = 0{,}7$; $\beta = 0{,}3$. Пусть $x + \Delta x = X$, тогда $e^{\frac{X}{a}} = \frac{k_1 s_1}{k_2 s_0}$. Отсюда

$$\frac{X}{a}=\frac{15}{120}=0{,}125,\ y=e^{0{,}125}=1{,}1327;$$

$$k_1=\frac{0{,}7\cdot 1{,}0278\cdot 0{,}3-0{,}7\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}33}{0{,}3\cdot 0{,}33}=1{,}059;$$

$$k_2=\frac{0{,}3\cdot 0{,}33-0{,}7\cdot 0{,}3}{(0{,}3\cdot 1{,}1327-0{,}7)0{,}3}=1{,}0278;$$

$$x=120\ln\frac{1{,}059\cdot 0{,}33}{1{,}0278\cdot 0{,}3}=14{,}9966\approx 15.$$

В данном случае в результате решения дифференциального уравнения получена логарифмическая функция, которая и обеспечила решение задачи обычным образом.

Практический интерес представляет большинство целевых установок, рассмотренных в гл. 2. Это в первую очередь:

$$x^{+}=\frac{k}{\gamma}\ln\frac{s_1^{-}(\alpha)}{s_0^{+}(\beta)};\quad x^{+}=\frac{k}{\gamma}\ln\frac{s_1^{+}(\alpha)}{s_0^{-}(\beta)};\quad x^{-}=\frac{k}{\gamma}\ln\frac{s_1^{-}(\alpha)}{s_0^{+}(\beta)};\quad x^{-}=\frac{k}{\gamma}\ln\frac{s_1^{-}(\alpha)}{s_0^{-}(\beta)}.$$

5.3. Изменение площадей плоских фигур

5.3.1. Площадь фигуры, ограниченная линиями

Вычислить площадь фигуры (рис. 5.3), ограниченной линиями:

$$y=x;\ y=5-x;\ x=1;\ x=2.$$

Запишем уравнения этих линий в общем виде: $y_1=c-x$; $y_2=px$. Допустим, что необходимо уменьшить площадь фигуры за счет увеличения параметра p на величину Δp и уменьшения параметра c на величину Δc, т.е.

$$y_1=(c-\Delta c)-x=\frac{c}{k_1}-x;$$

$$y_2=(p+\Delta p)x=pxk_2.$$

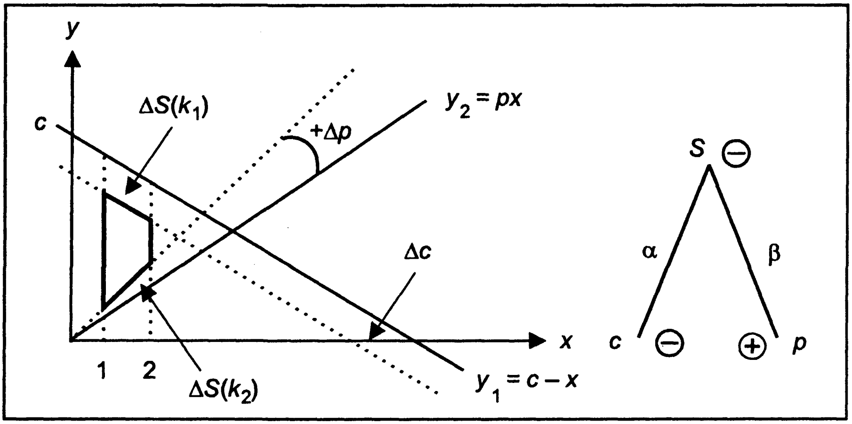


Рис. 5.3

Если через $\Delta S(k_1)$ и $\Delta S(k_1)$ обозначить приросты площади фигуры, получаемые за счет уменьшения параметра c и увеличения параметра p, то соответственно можно записать:

$$\Delta S(k_1) = S(k_1) - S; \quad \Delta S(k_2) = S(k_2) - S,$$

где $S(k_1)$ – площадь, получаемая за счет применения коэффициента k_1;
$S(k_2)$ – то же k_2;
S – исходная площадь фигуры.

Зная предпочтения в уменьшении площади, приходим к следующей задаче обратных вычислений:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b \left(\frac{c}{k_1} - x - k_2 px\right)dx = \overline{S}, \\ \dfrac{\Delta S(k_1)}{\Delta S(k_2)} = \dfrac{\alpha}{\beta}, \end{cases}$$

где $\overline{S}$ – желаемая площадь фигуры.

Поиск k_1 и k_2 будем вести последовательно. Прежде всего выразим один коэффициент через другой:

$$\int\limits_a^b \left(\frac{c}{k_1} - x - k_2 px\right)dx = \frac{c}{k_1}\int\limits_a^b dx - \int\limits_a^b xdx - k_2 p\int\limits_a^b xdx = \frac{c}{k_1}(b-a) - \frac{x^2}{2}\Big|_a^b - k_2\, p\frac{x^2}{2}\Big|_a^b =$$

$$= \frac{c}{k_1}(b-a) - \frac{b^2 - a^2}{2} - k_2 p\frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Введем обозначения: $\frac{b^2-a^2}{2}=Z, \frac{c}{k_1}(b-a)-Z-k_2pZ=\overline{S}$ и получим

$$k_2=\frac{\frac{c}{k_1}(b-a)-Z-\overline{S}}{pZ}.$$

Теперь определим, чему равны числитель и знаменатель второго уравнения рассматриваемой системы:

$$\frac{\Delta S(k_1)}{\Delta S(k_2)}=\frac{\int_a^b (c-x-\frac{c}{k_1}-x)dx}{\int_a^b (k_2px-px)dx}=\frac{c\int_a^b dx-\frac{c}{k_1}\int_a^b dx-2\int_a^b xdx}{pk_2\int_a^b xdx-p\int_a^b xdx}=$$

$$=\frac{c(b-a)-\frac{c}{k_1}(b-a)-\frac{2(b^2-a^2)}{2}}{pk_2\frac{b^2-a^2}{2}-p\frac{b^2-a^2}{2}}.$$

Если, как и ранее, считать, что $\frac{b^2-a^2}{2}=Z$, получим

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{c(b-a)-\frac{c}{k_1}(b-a)-2Z}{pk_2Z-pZ},$$

$$k_1=\frac{c(b-a)}{\alpha Z+\alpha\overline{S}+\alpha pZ+\beta c(b-a)-2\beta Z}.$$

П р и м е р: $c = 5$; $p = 1$; $a = 1$; $b = 2$; $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,3$; $Z = 1,5$.

П р я м а я з а д а ч а: $S=\int_1^2 (5-x-x)dx=2.$

Задача обратных вычислений: необходимо уменьшить площадь до $\bar{S} = 1{,}5$. Тогда получим

$$k_1 = \frac{5 \cdot 1}{0{,}7 \cdot 1{,}5 + 0{,}7 \cdot 1{,}5 + 0{,}7 \cdot 1 \cdot 1{,}5 + 0{,}3 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}5} = 1{,}33;\ k_2 = 0{,}51.$$

Проверка. $\int\limits_1^2 (\frac{5}{1{,}33} - x - 0{,}51x)dx = \frac{c}{k_1}(b-a) - Z - k_2 pZ = 1{,}49 \approx 1{,}5.$

5.3.2. Решение задач без указания приоритетности целей

Общий вид уравнения

$$\int\limits_a^b (\frac{c}{k_1} - x - k_2 x)dx = \bar{S}.$$

При $k_1 = k_2 = k$ имеем

$$\int\limits_a^b (\frac{c}{k} - x - kpx) = \bar{S};\quad \frac{c}{k}(b-a) - Z - kpZ = \bar{S};$$

$$k = \frac{-(Z+\bar{S}) + \sqrt{(Z+\bar{S})^2 + 4pZ(b-a)c}}{2pZ} = 1{,}08.$$

Проверка. $\frac{c}{k}(b-a) - Z - kpZ = \frac{5}{1{,}08} - 1{,}5 - 1{,}08 \cdot 1{,}5 = 1{,}51 \approx 1{,}5.$

5.3.3. Площадь фигуры, ограниченной кривыми

Вначале рассмотрим частный случай решения задачи обратных вычислений, где фигурирует лишь одно неизвестное. Метод обратных точечных вычислений здесь не нужен.

П р я м а я з а д а ч а. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$. Площадь фигуры, которую следует определить, изображена на рис. 5.4, где сплошная линия – указанная кривая.

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\int_{-2}^{2}4dx-\int_{-2}^{2}x^2dx=4x\Big|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}=10,07.$$

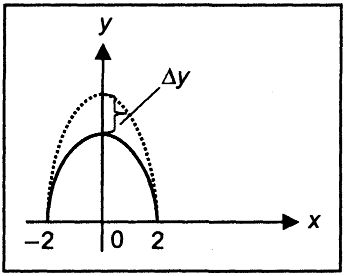


Рис. 5.4

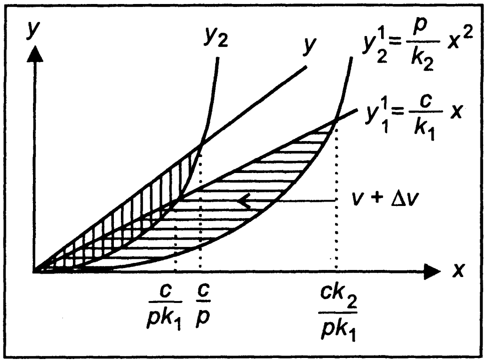


Рис. 5.5

З а д а ч а   о б р а т н ы х   в ы ч и с л е н и й. Площадь фигуры необходимо увеличит до 20 ед., т.е. $\bar{S}=S+\Delta S=20$. Тогда

$$S+\Delta S=\int_{-2}^{2}(4+\Delta y)dx-\int_{-2}^{2}x^2dx=\int_{-2}^{2}4dx+\int_{-2}^{2}\Delta y dx-\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{32}{3}+4\Delta y.$$

Отсюда: Δy = 2,3.

Проверка. $\int_{-2}^{2}6,3dx-\int_{-2}^{2}x^2dx=19,9\approx 20.$

Если в задаче неизвестных больше одного, то необходим аппарат обратных вычислений.

Пусть площадь фигуры задана следующими уравнениями (рис. 5.5):

$$y_1=cx;\ y_2=px^2;\ p>1;\ x=\frac{c}{p}.$$

И пусть целевая установка имеет вид:

$$y_1^+=c-(\alpha)x;\quad y_2^+=p^-(\beta)x^2.$$

Это значит, что необходимо увеличить площадь фигуры за счет изменения параметров функций следующим образом:

$$c-\Delta c=\frac{c}{k_1},\ p-\Delta p=\frac{p}{k_2}.$$

Если $p>1$, то точку пресечения линий можно получить следующим образом: $\frac{c}{k_1}=\frac{p}{k_2}$ и $x=\frac{ck_2}{pk_1}$.

Обозначим площадь исходной фигуры через V, а желаемую площадь – через $V+\Delta V=\bar{V}$. Тогда можно сделать следующий расчет:

$$V+\Delta V=\bar{V}=\iint(x+y)dxdy=\int\limits_0^{\frac{ck_2}{pk_1}}dx\int\limits_{\frac{px^2}{k_2}}^{\frac{cx}{k_1}}(x+y)dx=\int\limits_0^{\frac{ck_2}{pk_1}}\left.(xy+\frac{y^2}{2})\right|_{\frac{px^2}{k_2}}^{\frac{cx}{k_1}}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{ck_2}{pk_1}}(\frac{cx^2}{k_1}+\frac{c^2x^2}{2k_1^2}-\frac{px^3}{k_2}-\frac{p^2x^4}{2k_2^2})dx=(\frac{cx^3}{3k_1}+\frac{c^2x^3}{2k_1^2\cdot 3}-\frac{px^4}{4k_2}-$$

$$\left.-\frac{p^2x^5}{2k_2^2\cdot 5})\right|_0^{\frac{ck_2}{pk_1}}=\frac{c}{3k_1}\cdot\frac{c^3k_2^3}{p^3k_1^3}+\frac{c^2}{6k_1}\cdot\frac{c^3}{6k_1p^3k_1^3}-\frac{p}{4k_2}\cdot\frac{c^4k_2^4}{p^4k_1^4}-\frac{p^2}{10k_2^2}\cdot\frac{c^5k_2^5}{p^5k_1^5}=\bar{V}.$$

Приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}\frac{c}{3k_1}\cdot\frac{c^3k_2^3}{p^3k_1^3}+\frac{c^2}{6k_1}\cdot\frac{c^3k_2^3}{p^3k_1^3}-\frac{p}{4k_2}\cdot\frac{c^4k_2^4}{p^4k_1^4}-\frac{p^2}{10k_2^2}\cdot\frac{c^5k_2^5}{p^5k_1^5}=\bar{V},\\ \dfrac{\frac{c}{k_1}-c}{\frac{p}{k_2}-p}=\frac{\alpha}{\beta}.\end{cases}$$

Решив уравнение пятой степени относительно k_1 и подставив его во второе уравнение системы, получим искомые коэффициенты прироста. Здесь так же, как и в предыдущих разделах, для решения задач можно использовать типовые целевые установки.

5.4. Обратные вычисления на логарифмических, показательных и степенных функциях

5.4.1. Логарифмические функции

Рассмотрим логарифмическую функцию, у которой изменяется само логарифмическое выражение.

1. Целевая установка: $P^+ = (\lg^+ \Pi)\alpha + (\lg^+ C)\beta$.

Задачу будем решать с помощью индивидуальных коэффициентов прироста каждого из аргументов:

$$\lg \Pi + \Delta \lg \Pi = k_1 \lg \Pi,$$
$$\lg C + \Delta \lg C = k_2 \lg C.$$

Задача принимает вид:

$$\begin{cases} P + \Delta P = k_1 \lg \Pi + k_2 \lg C, \\ \dfrac{k_1 \lg \Pi - \lg \Pi}{k_2 \lg C - \lg C} = \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решив данную систему относительно k_1 и k_2, получим:

$$k_1 = \frac{\alpha(P + \Delta P) + \beta \lg \Pi - \alpha \lg C}{\lg \Pi},$$

$$k_2 = \frac{(P + \Delta P) - k_1 \lg \Pi}{\lg C}.$$

П р и м е р (рис. 5.6). $lg\Pi = lg100 = 2$; $lgC = lg1000 = 3$; $P = 5$; $\Delta P = 3$; $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$;

$$k_1 = 1{,}9;\ k_2 = 1{,}4;\ \lg \Pi + \Delta \lg \Pi = k_1 \lg \Pi = 1{,}9 \cdot 2 = 3{,}8;$$
$$\lg C + \Delta \lg C = k_2 \lg C = 1{,}4 \cdot 3 = 4{,}2.$$

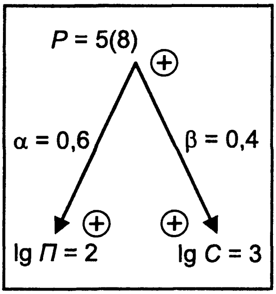


Рис. 5.6

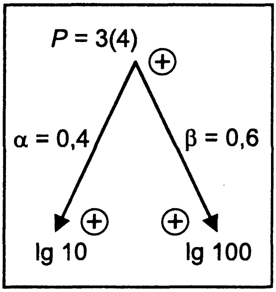


Рис. 5.7

Проверка. $P+\Delta P=3,8+4,2=8.$

Целевые установки вида: $P^{+}=\lg^{+} \Pi+\lg^{-} C$, $P^{+}=\lg^{-} \Pi+\lg^{+} C$,

$P^{-}=\lg^{+} \Pi+\lg^{-} C$ и т.д. реализуются аналогично.

Проанализируем логарифмическую функцию, у которой изменяется подлогарифическое выражение.

2. Целевая установка: $\mathbf{P^{+}=\lg \Pi^{+}(\alpha)+\lg C^{+}(\beta)}$.

Если, как и в предыдущем варианте, использовать индивидуальные коэффициенты, то можно записать:

$$\lg(\Pi+\Delta\Pi)=\lg k_1 \Pi,$$
$$\lg(C+\Delta C)=\lg k_2 C.$$

Тогда задача обратных вычислений принимает вид:

$$\begin{cases} P+\Delta P=\lg k_1 \Pi+\lg k_2 C, \\ \dfrac{10^{\lg k_1 \Pi}-\Pi}{10^{\lg k_2 C}-C}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим:

$$\lg k_1=\alpha(P+\Delta P), \lg k_2 C=(P+\Delta P)-\lg k_1 \Pi.$$

Система имеет решение при условии, что $\beta > \alpha$.

Пример (рис. 5.7). Π = 10; C = 100; P = 3; ΔP = 1; α = 0,4; β = 0,6; $\lg k_1 \Pi$= 0,4 · 4 = 1,6; $\lg k_2 C$ = 4 – 1,6 = 2,4; $\lg(\Pi + \Delta\Pi)$ = 1,6; $\lg(C + \Delta C)$ = 2,4; $10^{1,6} = \Pi + \Delta\Pi$; $\Delta\Pi$ = 29,8; $10^{2,4} = C + \Delta C$; ΔC = = 141,19.

Проверка. $P+\Delta P=\lg(10+29,8)+\lg(100+141,19)=3,9818\approx 4.$

Здесь также можно использовать большинство целевых установок, рассмотренных ранее, а именно:

$P^{+}=\lg П^{+}+\lg C^{-}$; $P^{+}=\lg П^{-}+\lg C^{+}$; $P^{-}=\lg П^{-}+\lg C^{-}$ и т.д.

5.4.2. Показательная функция

3. Целевая установка: $P^{+}=(П)^{x^{+}(\alpha)}+(C)^{y^{+}(\beta)}$.

Введем индивидуальные коэффициенты приростов:

$$П^{x}+П^{\Delta x}=П^{k_1 x},$$
$$C^{y}+C^{\Delta y}=C^{k_2 y}.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} P+\Delta P=П^{k_1 x}+C^{k_2 y}, \\ \dfrac{П^{k_1 x}-П^{x}}{C^{k_2 y}-C^{y}}=\dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Решая ее, получим:

$$П^{k_1 x}=(P+\Delta P)-C^{k_2 y}, \quad C^{k_2 y}=\alpha C^{y}+\beta(P+\Delta P)-\beta П^{x}.$$

П р и м е р (рис. 5.8). $П=3^3=27$; $С=2^4=16$; $P=43$; $\Delta P=7$; $\alpha=0,6$; $\beta=0,4$; $C^{k_2 y}=18,8$; $П^{k_1 x}=31,2$; $П^{x}+П^{\Delta x}=31,2$; $П^{\Delta x}=4,2$;

$$\Delta x=\frac{\ln 4,2}{\ln 3}=1,29;\ C^{y}+C^{\Delta y}=18,8;\ C^{\Delta y}=2,8;\ \Delta y=\frac{\ln 2,8}{\ln 2}=1,49.$$

Проверка. $P+\Delta P=3^3+3^{1,29}+2^4+2^{1,49}=49,93\approx 50.$

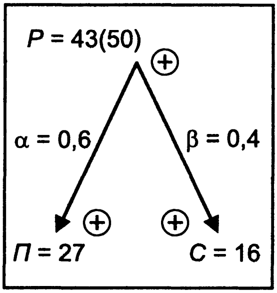


Рис. 5.8

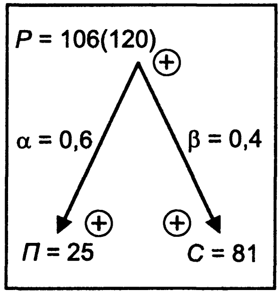


Рис. 5.9

5.4.3.
Степенная функция

4. Целевая установка: $P^+ = (\Pi^+(\alpha))^a + (C)^+(\beta))^b$.

Как обычно, введем индивидуальные коэффициенты:

$$(\Pi + \Delta\Pi)^a = k_1 \Pi^a;$$

$$(C + \Delta C)^b = k_2 C^b.$$

Определим коэффициенты прироста стандартным образом:

$$k_1 = \frac{\alpha(P + \Delta P) + \beta \Pi^a - \alpha C^b}{\Pi^a};$$

$$k_2 = \frac{(P + \Delta P) - k_1 \Pi^a}{C^b}.$$

Пример (рис. 5.9). $\Pi^a = 5^2 = 25$; $C^b = 3^4 = 81$; $P = 106$; $\Delta P = 14$; $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$; $k_1 = 1{,}336$; $k_2 = 1{,}069$; $(\Pi + \Delta\Pi)^2 = 1{,}336 \cdot 5^2 = 33{,}4$;

$$(C + \Delta C)^4 = 1{,}069 \cdot 3^4 = 86{,}589;\ \Pi + \Delta\Pi = \sqrt{33{,}4};\ \Delta\Pi = 5{,}575 - 5 = 0{,}779;$$

$$C + \Delta C = \sqrt[4]{86{,}589};\ \Delta C = 3{,}05 - 3 = 0{,}05.$$

Проверка. $P + \Delta P = (5 + 0{,}779)^2 + (3 + 0{,}05)^4 = 120{,}004 \approx 120$.

5. Целевая установка: $P^{+} = (\Pi^{+}(\alpha))^{a} + (C)^{-}(\beta))^{b}$.

Как и ранее, введем индивидуальные коэффициенты:

$$(\Pi + \Delta\Pi)^{a} = k_1 \Pi^{a},$$

$$(C - \Delta C)^{a} = \frac{C^{b}}{k_2}.$$

Составив стандартную систему уравнений и решив ее, получим:

$$k_1 = \frac{-\alpha(P + \Delta P) + \beta\Pi^{a} + \alpha C^{b}}{\Pi^{a}(\beta - \alpha)};$$

$$k_2 = \frac{C}{(P + \Delta P) - k_1 \Pi^{a}}.$$

Пример. $\Pi^{a} = 2^{3} = 8$; $C^{b} = 3^{4} = 81$; $P = 89$; $\Delta P = 11$; $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$; $k_1 = 5{,}125$; $k_2 = 1{,}373$; $(\Pi + \Delta\Pi)^{3} = 5{,}125 \cdot 8 = 41$;

$$(C - \Delta C)^{4} = \frac{81}{1{,}373} = 58{,}99;\ P + \Delta P = 41 + 58{,}99 = 99{,}99 \approx 100;$$

$$\Pi + \Delta\Pi = \sqrt[3]{41} = 3{,}448;\ C - \Delta C = \sqrt[4]{58{,}99} = 2{,}77;\ \Delta\Pi = 3{,}448 - 2 = 1{,}448;$$

$$\Delta C = 3 - 2{,}77 = 0{,}33.$$

Проверка: $P + \Delta P = (2 + 1{,}448)^{3} + (3 - 0{,}33)^{4} = 99{,}86 \approx 100.$

Глава 6

ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА, ПОДДЕРЖИВАЮЩИЕ ФОРМИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Практическое применение обратных точечных вычислений в формировании решений требует учета следующих обстоятельств:

- изменение значений терминальных вершин деревьев целей, вероятностей и вывода не может быть безграничным, ибо ресурсы предприятия всегда лимитированы;
- формирование решений должно базироваться на оценке альтернатив и выборе среди них наилучшего в отношении принятых на конкретном предприятии критериев;
- инструментальные средства, ориентированные на выполнение обратных вычислений, должны функционировать в форме программной оболочки, не требующей программирования и обеспечивающей оперативное изменение целей лица, формирующего решение.

С учетом перечисленных обстоятельств рассмотрим, каким образом должны быть реализованы инструментальные средства, предназначенные для формирования решений с помощью обратных точечных вычислений.

6.1. Учет ограничений в процессе формирования решений

Предприятие или организация для достижения главной цели своего функционирования обладает ресурсами, которые всегда ограничены. Существуют следующие виды ресурсов: материальные, финансовые, трудовые, энергетические, информационные, временные и др.

Распространенные в настоящее время системы формирования решений, известные как системы поддержки принятия решений, ориентированы на прямые расчеты. Это является причиной того, что в процессе вычислений требуется одновременный учет ограничений на все ресурсы. Отсутствие в надлежащем объеме даже одного из них делает решение задачи невозможным. Например, если в задаче исследования операций, где в качестве ограничений используется система неравенств (равенств), хотя бы один из ресурсов не удовлетворяет указанному ограничению, то задача не имеет решения.

Кроме того, большинство методов, базирующихся на прямых вычислениях, предлагают «жесткие» решения, что ведет к неустойчивому функционированию систем любого характера. Это является одной из главных причин перехода к «мягким» вычислениям, более толерантным к окружающей среде, которые приближают принятые решения к реальным ситуациям. Именно такие характеристики можно заложить в системы, базирующиеся на обратных точечных вычислениях.

В контексте «мягких» вычислений понятие «ресурс» следует рассматривать расширительно: это значит, что в качестве ресурса рассматриваются и объем финансов, за счет которого может расширяться производство, и предел снижения продажных цен на продукцию, выпускаемую предприятием, и предел роста кредитов, который может позволить себе предприятие, и т.д.

Замечательное свойство «мягких» обратных точечных вычислений заключается в том, что при истощении одних ресурсов возможно достижение главной цели за счет других. За пояснениями обратимся к рис. 6.1.

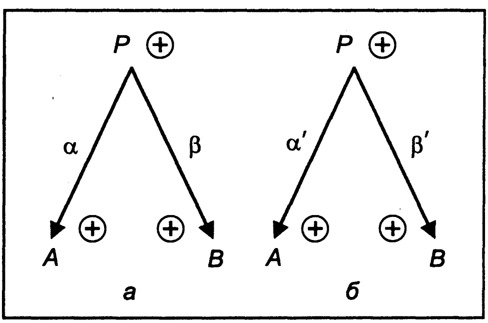


Рис. 6.1

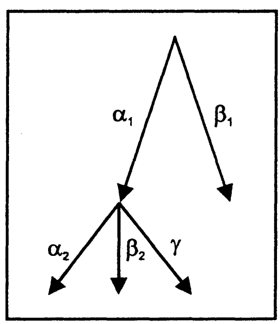


Рис. 6.2

Как правило, перерасчет показателей происходит либо в пределах заранее указанных ресурсов, либо в режиме изменяемости ресурсов, задаваемых пользователем в процессе решения задачи. Если перерасчет происходит в пределах указанных ресурсов, т.е. существует некоторый предел прироста показателей, то при достижении такого предела должно произойти динамическое перераспределение КОВ. С помощью рис. 6.1, *а* рассмотрим этот процесс.

Допустим, значение узла A превысило допустимый предел, т.е.

$$A+\Delta A > A+\Delta A_{\text{доп}}.$$

Тогда для узла A рассчитывается α', гарантирующее $\Delta A = \Delta A_{\text{доп}}$, а β' приобретает новое значение, обеспечивающее достижение требуемого ΔP (рис. 6.1, *б*). Формула для перерасчета следующая:

$$\alpha' = \frac{\alpha_i \cdot \Delta A_i'}{\Delta A},$$

где α' – новый КОВ, обеспечивающий достижение $\Delta A_{\text{доп}}$;

$\Delta A_i'$ – допустимый предел изменения ΔA_i;

ΔA_i – прирост, требуемый коэффициентом α.

Для расчета β' прежде всего следует определить новый вес оставшихся показателей:

$$\sigma = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i',$$

где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'$ – сумма всех вновь рассчитанных КОВ;

n – число вновь рассчитанных показателей.

Тогда КОВ для каждого вновь рассчитанного показателя равен:

$$\beta_j' = \beta_j \frac{\sigma}{\sum_{i=1}^{m} \beta_j},$$

где m – число показателей, не изменивших свой статус;

β_j' – вновь рассчитанный КОВ для показателя;

β_j – предыдущее значение КОВ для показателя;

$\sum_{j=1}^{m} \beta_j$ – сумма всех КОВ, не изменивших свой статус.

Таким образом, в случае надобности перерасчет происходит для тех вершин дерева, которым указанного ресурса не хватает. Заимствование ресурса происходит у «соседа справа», т.е. используется ресурс, предназначенный для прироста вершины, находящейся справа от текущей. Если и этого не хватило, то происходит обращение к следующей вершине, находящейся справа, и так до конца дерева целей. Не исключено, что для достижения главной цели ресурсов на предприятии не достаточно, о чем должна оповещать в конце концов система формирования решений.

Принцип обращения за ресурсами к «соседу справа» восходит к основам логического программирования, и, как известно, ориентирует на обработку знаний в последовательности «сверху–вниз–слева–направо». Применение этого принципа для построения систем формирования решений на основе обратных точечных вычислений снимает множество проблем как теоретического, так и практического характера.

6.2. Формирование альтернатив, их оценка и выбор

Добиться главной цели, представленной с помощью дерева, можно путями, число которых трудно подсчитать. Пока не существует какого-либо метода, который позволяет осуществлять поиск альтернативы, последовательно отбрасывая ненужные, как это делается в математическом программировании. Сегодня можно получить результат, лишь определив разумное множество альтернатив, среди которых на основании некоторого критерия выбирается один.

Получить множество альтернатив, отражающих результаты обратных вычислений, можно путем табулирования коэффициентов относительной важности целей в указанных заранее границах. Иллюстрацией результатов этого процесса служит рис. 6.2, где представлен фрагмент дерева целей, у которого КОВ изменяется в следующих границах:

$$0,6 \le \alpha_1 \le 0,8; 0,2 \le \beta_1 \le 0,4;$$

$$0,3 \le \alpha_2 \le 0,6; 0,1 \le \beta_2 \le 0,3; 0,2 \le \gamma \le 0,1.$$

Как правило, лицо, формирующее решение, может также изменять и граничные значения ресурсов, пытаясь получить вариант решения, наиболее выгодный в настоящее время. Например, если есть возможность изменять ограничение на ресурс a на величину от A до $\bar{A}$, а ресурс b – от B до $\bar{B}$, то, естественно, число альтернатив еще больше возрастет.

Некоторые варианты достижения главной цели, которые могут быть получены с помощью представленного на рис. 6.2 фрагмента дерева целей, показаны в табл. 6.1. Шаг табуляции для КОВ равен 0,1, для ресурса a – 10 ед., для ресурса b – 0,01 ед.

Таблица 6.1

Варианты значений коэффициентов относительной важности целей

Коэффициенты относительной важности	Варианты		
	1	2	...
$0,6 \le \alpha_1 \le 0,8$	0,8	0,7	...
$0,2 \le \beta_1 \le 0,4$	0,2	0,3	...
$0,3 \le \alpha_2 \le 0,6$	0,6	0,5	...
$0,1 \le \beta_2 \le 0,3$	0,1	0,2	...
$0,1 \le \gamma_1 \le 0,3$	0,3	0,3	...
$90 \le a \le 100$	100	90	...
$0,11 \le b \le 0,15$	0,15	0,14	...

Оценка и выбор полученных альтернатив возможны на основе следующих критериев.

1. Лучшим будет тот вариант решения, который обеспечивает максимальное продвижение к цели с минимальным заимствованием ресурсов у «соседа справа».

2. Лучшим будет тот вариант, который обеспечивает максимальное продвижение к цели с минимальным заимствованием у любого партнера («дешевый кредит»).

Первый критерий предполагает жестко установленную последовательность заимствований, соответствующую расположению терминальных вершин дерева целей. Второй критерий такой последовательности не предполагает. Заем будет сделан в той терминальной вершине, где «платить» за него придется меньше всего.

Критерий «дешевого кредита» более точный, так как позволяет управлять заимствованием, исходя не из наперед жестко заданной схемы (слева направо), а на основе схемы, учитывающей предпочтения не только у «соседа справа», но у всей совокупности терминальных вершин.

Совершенствование предложенных здесь критериев выбора лучшего решения может быть продолжено в направлении установления некоторой границы, заимствование в пределах которой может не штрафоваться или штрафоваться по линейной зависимости, а за ее пределами – более жестко, например, согласно экспоненциальной зависимости. В арсенале разработчика системы здесь может использоваться весь перечень известных ему функций. Более подробно об этом можно прочесть в [5].

6.3. Разработка систем формирования решений на основе программных оболочек

Систему формирования решений, ориентированную на использование результатов обратных вычислений, целесообразно создавать на основе программных оболочек. Характерная черта такого рода инструментальных средств заключается в том, что они позволяют без программирования изменять как процесс расчета, так и форму представления знаний.

Для обратных вычислений требуются следующие формы представления знаний: дерево целей, дерево вероятностей, дерево вывода и нечеткие множества. Обработка деревьев целей и вывода возможна по принципу «сверху–вниз–слева–направо», а дерева вероятностей – «сверху–вниз». Состав системы формирования решений, ориентированной на применение результатов обратных вычислений, представлен на рис. 6.3.

Главными компонентами системы являются база данных и база знаний.

База данных используется в качестве внешнего их источника и содержит информацию о состоянии дел как на самом предприятии, так и за его пределами. Внутренняя информация касается производства, финансов, основных фондов, оборотных средств, кадров и т.д. Вся перечисленная информация достаточно точна и находится в обязательной бухгалтерской и статистической отчетности.

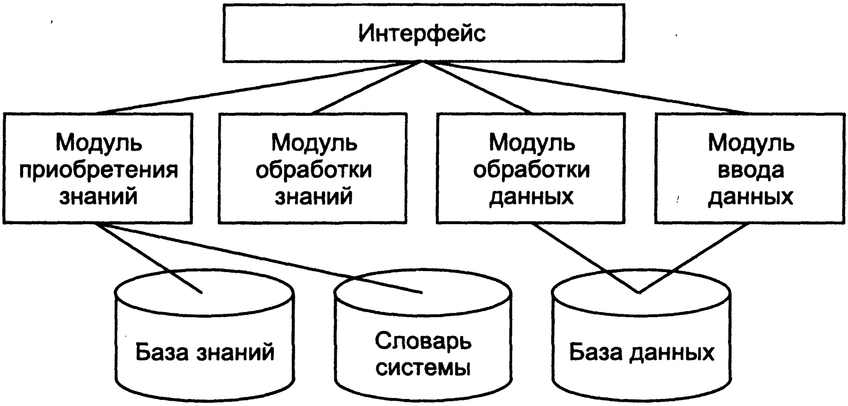


Рис. 6.3

Внешняя информация отражает состояние дел во внешней сфере и касается рынка, конкурентов, кредитной и таможенной политики государства, мировых тенденций в области финансов и энергоносителей и др. Источником этой информации являются бюллетени, сводки, биржевые отчеты, пресса.

База знаний содержит модели формирования решений, ориентированные на вполне конкретную область. Знания в системе, ориентированной на обратные вычисления, могут быть представлены в следующих формах:

- дерево целей, снабженное формулами расчета;
- дерево вывода;
- дерево вероятностей;
- нечеткие множества.

Модули приобретения знаний и ввода данных содержат в себе систему управления базами знаний (СУБЗ) и систему управления базами данных (СУБД). С помощью СУБЗ создают деревья целей, выводов и вероятностей, корректируют и ликвидируют их. СУБД предназначены для создания баз данных, ввода исходных данных и их корректировки.

Модуль обработки знаний состоит из ряда подмодулей, предназначенных для числовой обработки каждого вида знаний. Работают они автономно.

Модуль обработки данных предназначен для поиска, агрегирования и выполнения предварительных расчетов на основе баз данных.

Пользовательский интерфейс является диалоговой компонентой системы и представляет собой программные и аппаратные средства, которые обеспечивают взаимодействие пользователя с системой. Данный термин охватывает все аспекты взаимодействия пользователя и системы формирования решений. Он также включает те факторы, которые делают взаимодействие простым, интерактивным и удобным. Недружественность пользовательского интерфейса зачастую является главной причиной того, что менеджеры не используют компьютерную поддержку своей деятельности в полной мере.

Наличие программной оболочки исключает этап программирования, что существенно сокращает трудоемкость и сроки разработки системы. Она позволяет лицу, формирующему решение, оперативно адаптировать систему под новую конъюнктуру рынка, изменения в социальной среде и т.д.

В зависимости от характера принимаемых решений используется та или иная форма базы знаний. Если проблема и цель достаточно определены и могут быть описаны детерминированными зависимостями, то применяется дерево целей. В противном случае, т.е. когда связи между событиями расплывчаты, но могут быть описаны с некоторой долей определенности, применяются деревья вывода и нечеткие множества. При наличии вероятностной информации можно применять дерево вероятностей.

Перечислим типовые процедуры машинной технологии формирования решения с помощью программных оболочек.

1. Сформулировать проблему, цель или гипотезу, требующие принятия решения, а также критерий оценки альтернатив.

2. Выполнить постановку задачи и выбрать модель базы знаний.

3. Составить словарь системы.

4. Наполнить систему знаниями и данными.

5. Проанализировать полученный вариант (варианты) решения и в случае надобности изменить условия их получения.

Формирование проблемы, цели или гипотезы

Допустим, предприятие характеризуется низкой рентабельностью и высокой себестоимостью продукции, что существенно снижает его конкурентоспособность. Признаками проблемы низкой конкурентоспособности являются сокращение объемов реализованной продукции, снижение уровня заработной платы, а также трудности с получением и возвратом кредитов.

Цель в данном случае состоит в повышении рентабельности до желаемого уровня, определяемого траекторией развития предприятия. В качестве критерия оценки вариантов решений можно выбрать минимум ресурсов, необходимых для достижения цели.

Постановка задачи и выбор модели базы знаний

Согласно сложившейся практике постановка задачи должна содержать описание:

- результирующей информации (что следует получить в результате решения задачи);
- входной информации;
- условно-постоянной информации;
- процедур и алгоритмов преобразования входной информации в результирующую.

В итоге выполнения данной процедуры получают:

- дерево целей с формулами для расчетов, или дерево вывода типа И-ИЛИ с нечеткими множествами;
- ограничения, диктуемые объемами наличных ресурсов;
- перечень первичных документов (бухгалтерских, финансовых, внешних и др.);
- перечень результирующих документов (бумажных, электронных).

Составление словаря системы

Словарь системы – это набор слов, фраз, кодов, наименований, используемых разработчиком для обозначения условий, целей, заключений и гипотез. Словарь – это тот набор слов и обозначений, которым владеет система и благодаря которому пользователь понимает результаты ее работы. Составление словаря – важная работа, ибо четко сформулированные условия и ответы резко повышают эффективность эксплуатации системы. При составлении словаря и при его вводе в систему следует иметь в виду, что требуется однозначное, без повторений обозначение (или формулирование) только гипотез (главных заключений, находящихся в корне дерева). Условия и промежуточные выводы могут использоваться в качестве исходных данных для вывода различных гипотез и поэтому их обозначения могут повторяться.

Наполнение системы данными и знаниями

Эта процедура предусматривает отчуждение субъективных знаний у лица, формирующего решение, для настройки системы. Системе следует сообщить:

• приоритеты в достижении цели на различных уровнях дерева, а также шаг и диапазон изменения коэффициентов относительной важности (КОВ);

• ограничения на используемые ресурсы, а также диапазон их изменения;

• критерий, согласно которому следует выбирать вариант решения;

• форму выдаваемой информации (таблица, диаграмма, график и т.д.).

Исходные данные из бухгалтерской, финансовой и другой отчетности, а также информация из внешних источников (ставки рефинансирования, кредитные ставки, таможенные пошлины и т.д.) поступают в базу данных.

Анализ предложенного варианта решения

Система может лишь подготовить вариант (варианты) решения, но не может его принять. Ответственность за принятие решения несет лицо, формирующее решение, поэтому оно должно взвесить все возможные последствия данного шага. Если возникают какие-либо сомнения либо появились новые соображения, которые можно ввести в систему и получить уточненное решение, то после их ввода система повторно выполняет необходимые расчеты и предоставляет новый вариант решения.

6.4. Технология функционирования системы формирования решений

Технологию функционирования системы рассмотрим с помощью интерфейса, указывающего на операции, которые следует выполнить.

Основное меню системы содержит шесть позиций, содержание которых раскрывается с помощью выпадающих подменю. Для разработчика системы предназначены позиции ***Правила***, ***Ввод***, ***Редактирование***, а для пользователя – ***Ввод***, ***Выполнение***, ***Печать***. В процессе приобретения опыта работы с системой пользователь сам сможет выполнять функции разработчика, так как программирование не требуется.

Позиция ***Правила*** позволяет вводить правила при создании новой системы. Чтобы инициировать работу созданного набора правил, предварительно необходимо его загрузить. Для этого предназначена позиция ***Загрузить***, которая после ее выбора предоставляет пользователю возможность указать и загрузить требуемый набор правил.

После ввода нового набора правил возникает необходимость в его сохранении. Сохранить можно под старым именем или новым. Для этого достаточно указать позиции ***Сохранить*** или ***Сохранить как...*** При желании можно отказаться от этих функций нажатием клавиши Esc.

Таблица «Ввод знаний» предоставляет эксперту возможность ввести следующую информацию:

Гипотезы.

Правила.

Формулы.

База данных.

Терминальные вершины.

Указав первую позицию, пользователь получает на экране макет ввода гипотезы. При этом в случае проверки гипотезы на синонимию он может, нажав клавишу F7, открыть окно словаря использованных гипотез. После ввода всех требуемых гипотез (ввод их обязателен) эксперт нажатием клавиши Esc может вернуться в главное меню.

Ввод правил с помощью позиции ***Правила*** является центральной процедурой системы. Указав данную позицию, пользователь получает меню, в котором следует уточнить тип правила. Для этого предусмотрена таблица «Тип правила».

Выбрав позицию ***Простое***, эксперт получит макет ввода простого правила (рис. 6.4).

Ввод правил, условия в которых связаны логическими операциями ИЛИ/И, выполняется по тому же макету, что и простое правило, однако число выводов не ограничивается.

Некоторые или большинство терминальных вершин могут содержать условия, выполнение которых ведет к изменению содержания самого правила. Если возникла необходимость ввода реляционного выражения, эксперт в окне «Тип правила» должен указать позицию **Реляционное выражение**, что обеспечит ему соответствующий макет ввода (рис. 6.5).

В том случае, если реляционное выражение поддерживается формулами, следует указать соответствующую позицию (Формулы). Указав ее, эксперт получает на экране макет ввода формул (рис. 6.6).

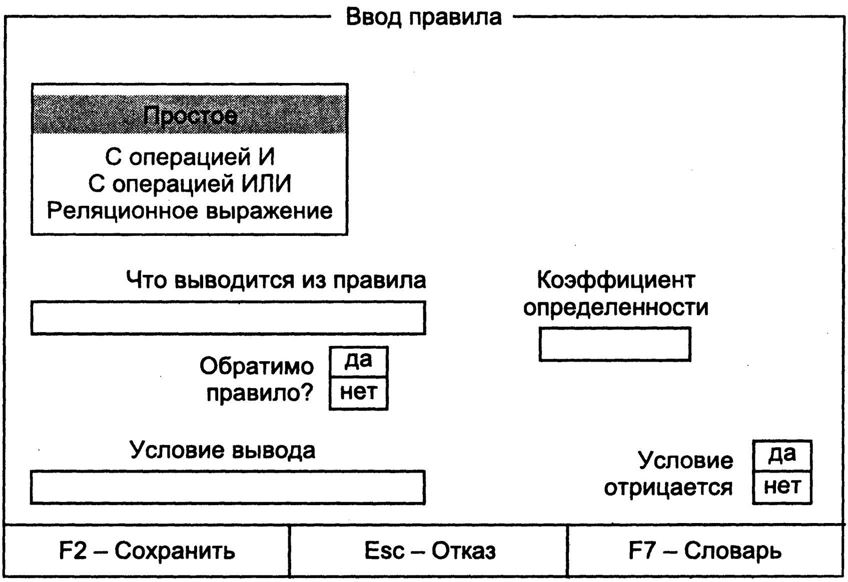


Рис. 6.4

Просмотр и редактирование уже введенного набора правил осуществляется с помощью специального диалогового окна. Изменение (удаление, редактирование) осуществляется после вызова директории с именами файлов с наборами правил. Чтобы добавить новое правило, можно воспользоваться таблицей диалога «Тип правила», которая, в свою очередь, обеспечит эксперту макет ввода правила.

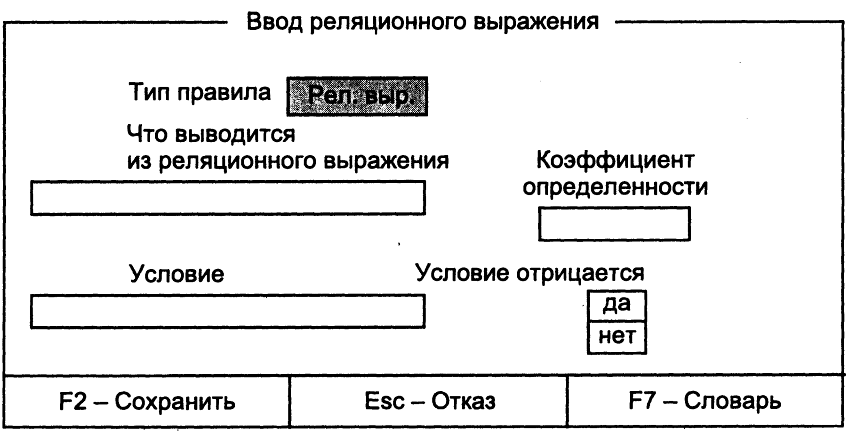


Рис. 6.5

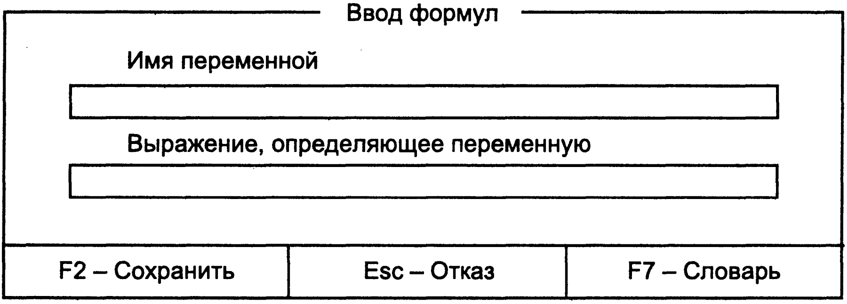


Рис. 6.6

Позиция ***Выполнение*** главного меню предназначена для пользователя. Однако, прежде чем запустить систему на выполнение, он должен загрузить тот набор правил, работа с которым планируется. Загрузка осуществляется в окне ***Ввод правил***. Указав позицию ***Выполнение***, пользователь получает окно с предложением указать, обрабатывать ли все гипотезы данного набора правил или только одну. Введя в окно свое пожелание, пользователь получает макет ввода значений переменных для использования реляционных выражений и формул. Осуществляется это с помощью таблицы диалога «Макет ввода коэффициентов». Макет ввода представлен на рис. 6.7.

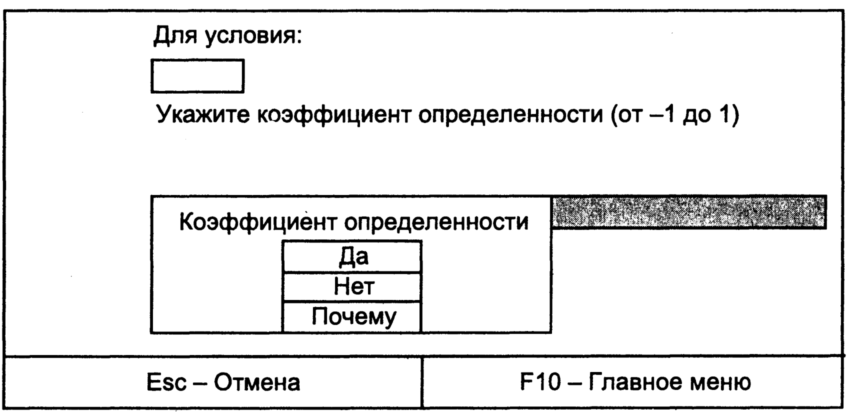


Рис. 6.7

После окончания ввода всех исходных данных система автоматически производит расчет коэффициента определенности гипотезы. Если в качестве терминальных вершин используются реляционные выражения или формулы, ввод их производится так же, как и простых терминальных вершин.

Результаты расчетов предоставляются в диалоговом окне, форма которого показана на рис. 6.8.

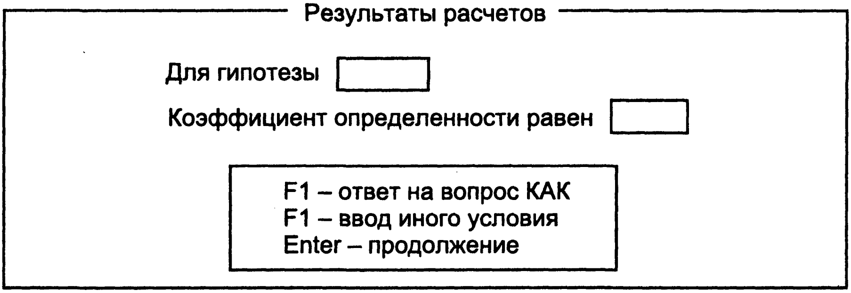


Рис. 6.8

Возникшие сомнения в отношении правильности результатов пользователь может рассеять, нажав клавишу F1. В результате на экране появляется объяснение типа КАК.

Дальнейшее развитие систем, ориентированных на применение обратных вычислений, по всей вероятности, будет направлено на синтез неоднородных баз знаний. Это представляется вполне очевидным, так как человек применяет в своей деятельности множество форм и методов представления и обработки знаний.

Второе направление, которое уже достаточно интенсивно развивается, касается методов, обслуживающих информационные технологии, направленные на обработку информации, поступающей из сети Интернет. Эта информация характеризуется сильной неструктурированностью и разнородностью, однако она необходима для правильного формирования решения. В настоящее время интенсивно развиваются информационные технологии, предназначенные для обработки именно такой информации, названные «Интеллектуальный анализ данных» (Data Mining). Ожидается, что эта и другие новейшие достижения в области искусственного интеллекта существенно повлияют на дальнейшее развитие систем формирования решений.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Формулы обратных вычислений для детерминированных зависимостей

Целевая установка, пример	Прирост аргументов	Коэффициенты
Решение задач с помощью индивидуальных коэффициентов		
$\boldsymbol{y^+ = f(x^+(\alpha), z^+(\beta))}$, $П^+ = B^+(\alpha) - C^+(\beta)$, $\alpha > \beta$	$B + \Delta B = k_1 B$, $C + \Delta C = k_2 C$	$k_1 = \dfrac{П + \Delta П + k_2 C}{B}$, $k_2 = \dfrac{\alpha C + \beta(П + \Delta П) - \beta B}{C(\alpha - \beta)}$
$\boldsymbol{y^+ = f(x^+(\alpha), z^-(\beta))}$, $P^+ = \dfrac{П^+(\alpha)}{C^-(\beta)}$, $\alpha > \beta$	$П + \Delta П = k_1 П$, $C - \Delta C = \dfrac{C}{k_2}$	$k_1 = \dfrac{\alpha + \beta P}{\beta P + \dfrac{\alpha P}{P + \Delta P}}$, $k_2 = \dfrac{P + \Delta P}{k_1 P}$
$\boldsymbol{y^+ = f(x^-(\alpha), z^+(\beta))}$, $Ф^+ = AФ^-(\alpha) + ПФ^+(\beta)$, $\beta > \alpha$	$AФ - \Delta AФ = \dfrac{AФ}{k_1}$, $ПФ + \Delta ПФ = k_2 ПФ$	$k_1 = \dfrac{AФ(\beta - \alpha)}{\beta AФ + \alpha ПФ - \alpha(Ф + \Delta Ф)}$, $k_2 = \dfrac{(Ф + \Delta Ф) - \dfrac{AФ}{k_1}}{ПФ}$
$\boldsymbol{y^+ = f(x^-(\alpha), z^-(\beta))}$, $P^+ = \dfrac{П^-(\alpha)}{C^-(\beta)}$, $\alpha > \beta$	$П - \Delta П = \dfrac{П}{k_1}$, $C - \Delta C = \dfrac{C}{k_2}$	$k_1 = \dfrac{\dfrac{\alpha C P}{P + \Delta P} - \beta П}{\alpha C - \beta П}$, $k_2 = \dfrac{k_1(P + \Delta P)}{P}$
$\boldsymbol{y^- = f(x^+(\alpha), z^+(\beta))}$, $П^- = B^+(\alpha) - C^+(\beta)$, $\beta > \alpha$	$B + \Delta B = k_1 B$, $C + \Delta C = k_2 C$	$k_1 = \dfrac{\beta B + \alpha(П - \Delta П) - \alpha C}{B(\beta - \alpha)}$, $k_2 = \dfrac{k_1 B - (A - \Delta A)}{C}$
$\boldsymbol{y^- = f(x^-(\alpha), z^+(\beta))}$, $Ф^- = AФ^-(\alpha) +$ $+ПФ^+(\beta)$, $\beta > \alpha$	$AФ - \Delta AФ = \dfrac{AФ}{k_1}$, $ПФ + \Delta ПФ = k_2 ПФ$	$k_1 = \dfrac{AФ(\beta - \alpha)}{\beta AФ + \alpha ПФ - \alpha(Ф - \Delta Ф)}$, $k_2 = \dfrac{(Ф - \Delta Ф) - \dfrac{AФ}{k_1}}{ПФ}$

Целевая установка, пример	Прирост аргументов	Коэффициенты
$\boldsymbol{y^- = f(x^-(\alpha), z^-(\beta))}$, $P^- = \dfrac{П^-(\alpha)}{C^-(\beta)}, \alpha > \beta$	$П - \Delta П = \dfrac{П}{k_1}$, $C - \Delta C = \dfrac{C}{k_2}$	$k_1 = \dfrac{\dfrac{\alpha CP}{P - \Delta P} - \beta П}{\alpha C - \beta П}$, $k_2 = \dfrac{k_1(P - \Delta P)}{P}$.
Решение задач на основе единого коэффициента прироста аргументов		
$\boldsymbol{y^+ = f(x^+(\alpha), z^+(\beta))}$, $P^+ = K^+(\alpha) \cdot Ц^+(\beta)$, $\alpha > \beta$.	$\Delta K = \alpha k_0$, $\Delta Ц = \beta k_0$	$-(\alpha Ц + \beta K) = d$ $k_0 = \dfrac{d \pm \sqrt{(d^2 + 4\alpha\beta\Delta P}}{2\alpha\beta}$
$\boldsymbol{y^+ = f(x^+(\alpha), z^-(\beta))}$, $P^+ = \dfrac{П^+(\alpha)}{C^-(\beta)}$	$\Delta П = \alpha k_0$, $\Delta C = \beta k_0$	$k_0 = \dfrac{\Delta P \cdot C}{\beta(P + \Delta P) + \alpha}$
$\boldsymbol{y^+ = f(x^-(\alpha), z^+(\beta))}$, $Ф^+ = AФ^-(\alpha) + ПФ^+(\beta)$, $\beta > \alpha$	$\Delta AФ = \alpha k_0$, $\Delta ПФ = \beta k_0$	$k_0 = \dfrac{\Delta Ф}{\beta - \alpha}$
$\boldsymbol{y^+ = f(x^-(\alpha), z^-(\beta))}$, $P^+ = \dfrac{П^-(\alpha)}{C^-(\beta)}$	$\Delta П = \alpha k_0$, $\Delta C = \beta k_0$	$k_0 = \dfrac{C \cdot \Delta P}{\beta(P + \Delta P) - \alpha}$
$\boldsymbol{y^- = f(x^+(\alpha), z^+(\beta))}$, $П = B - C$	$\Delta B = \alpha k_0$, $\Delta C = \beta k_0$	$k_0 = \dfrac{\Delta A}{\beta - \alpha}$
$\boldsymbol{y^- = f(x^-(\alpha), z^+(\beta))}$, $P^- = \dfrac{П^-(\alpha)}{C^+(\beta)}$, $\alpha > \beta$	$\Delta П = \alpha k_0$, $\Delta C = \beta k_0$	$k_0 = \dfrac{П - C(P - \Delta A)}{\beta(P - \Delta P) + \alpha}$
$\boldsymbol{y^- = f(x^-(\alpha), z^-(\beta))}$, $P^- = K^-(\alpha) \cdot C^-(\beta)$	$\Delta K = \alpha k_0$, $\Delta C = \beta k_0$	$K\beta + C\alpha = d$ $k_0 = \dfrac{d \pm \sqrt{d^2 + 4\alpha\beta\Delta P}}{2\alpha\beta}$

Целевая установка, пример	Прирост аргументов	Коэффициенты
Решение задач без коэффициентов прироста аргументов		
$\boldsymbol{y^{+} = f(x^{+}(\alpha), z^{+}(\beta))}$, $П^{+} = B^{+}(\alpha) - C^{+}(\beta)$, $\alpha > \beta$	$\Delta B = \frac{\alpha}{\beta}\Delta C$, $\Delta C = \frac{\Delta A}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}$	–
$\boldsymbol{y^{+} = f(x^{+}(\alpha), z^{-}(\beta))}$, $P^{+} = \frac{П^{+}(\alpha)}{C^{-}(\beta)}$, $\alpha > \beta$	$\Delta C = \frac{(P + \Delta P)C - П}{P + \Delta P + \frac{\alpha}{\beta}}$, $\Delta П = \frac{\alpha \Delta C}{\beta}$	–
$\boldsymbol{y^{+} = f(x^{-}(\alpha), z^{+}(\beta))}$, $П^{+} = П_{п}^{-}(\alpha) + П_{и}^{+}(\beta)$	$\Delta П_{п} = \frac{\alpha}{\beta}\Delta П_{и}$, $\Delta П_{и} = \frac{\Delta П}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$	–
$y^{+} = f(x^{-}(\alpha), z^{-}(\beta))$, $I^{+} = \frac{Б^{-}(\alpha)}{A^{-}(в)}$	$\Delta A = \frac{A(I + \Delta I) - Б}{I + \Delta I - \frac{\alpha}{\beta}}$, $\Delta Б = \frac{\alpha}{\beta}\Delta A$	–
$\boldsymbol{y^{-} = f(x^{+}(\alpha), z^{+}(\beta))}$, $П^{-} = B^{+}(\alpha) - C^{+}(\beta)$, $\beta > \alpha$	$\Delta B = \frac{\alpha C}{\beta}$, $\Delta C = \frac{\Delta A}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$	–
$\boldsymbol{y^{-} = f(x^{+}(\alpha), z^{-}(\beta)}$, $П^{-} = П_{п}^{+}(\alpha) + П_{и}^{+}(\beta)$	$\Delta П_{п} = \frac{\alpha \Delta П_{и}}{в}$, $\Delta П_{и} = -\frac{\Delta П}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}$	–

Целевая установка, пример	Прирост аргументов	Коэффициенты
$y^- = f(x^-(\alpha), z^+(\beta)$, $\Pi^- = \Pi_п^-(\alpha) + \Pi_и^+(\beta)$	$\Delta\Pi_п = \frac{\alpha\Delta\Pi_и}{\beta}$, $\Delta\Pi_и = \frac{\Delta\Pi}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}$	–
$y^- = f(x^-(\alpha), z^-(\beta)$, $\Pi^- = \Pi_п^-(\alpha) + \Pi_и^-(\beta)$	$\Delta\Pi_п = \frac{\alpha\Delta\Pi_и}{\beta}$, $\Delta\Pi_и = -\frac{\Delta\Pi}{1 + \frac{\alpha}{\beta}}$	–
Решение задач без указания приоритетности целей		
$y^+ = f(x^+, z^+)$, $\Pi^+ = B^+ - C^+$	$B + \Delta B = kB$, $C + \Delta C = kC$	$k = \frac{\Pi + \Delta\Pi}{\Pi}$
$y^+ = f(x^+, z^-)$ $P^+ = \frac{\Pi^+}{C^-}$	$\Pi + \Delta\Pi = k\Pi$, $C - \Delta C = \frac{C}{k}$	$k = \sqrt{\frac{P + \Delta P}{P}}$
$y^+ = f(x^-, z^+)$ $A^+ = B^- - C^+$	$B - \Delta B = \frac{B}{k}$, $C + \Delta C = kC$	$k = \frac{-(A + \Delta A) + \sqrt{(A + \Delta A)^2 + +4CB}}{2C}$
$y^- = f(x^-, z^-)$ $A^- = B^- - C^-$	$B - \Delta B = \frac{B}{k}$, $C - \Delta C = \frac{C}{k}$	$k = \frac{A}{A - \Delta A}$

2. Формулы обратных вычислений для вероятностных зависимостей

Целевая установка	Вид задачи
$\boldsymbol{P(A+B)^+ = P(A(\alpha))^+ + P(B(\beta))^+}$	$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)+\Delta P(B) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$\boldsymbol{P(A+B)^+ = P(A(\alpha))^+ + P(B(\beta))^-}$	$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)-\Delta P(B) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$\boldsymbol{P(A+B)^- = P(A(\alpha))^+ + P(B(\beta))^-}$	$\begin{cases} P(A+B)-\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)-\Delta P(B) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$\boldsymbol{P(A+B)^+ = P(A)^+ + P(B)^+}$	$\begin{cases} P(A+B)\pm\Delta P(A+B)=P(A)\pm\Delta P(A)+P(B)\pm\Delta P(B) \\ \Delta P(A)=k\cdot P(A) \\ \Delta P(B)=k\cdot P(B) \end{cases}$
$\boldsymbol{P(A+B)^+ = P(A)^+ + P(B)^-}$	$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)-\Delta P(B) \\ \Delta P(A)=k\cdot P(A) \\ \Delta P(B)=k\cdot P(B) \end{cases}$
$\boldsymbol{P(A+B)^+ = P(A)^+ + P(B)^+ - P(A)^+\cdot P(B)^+}$	$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)+\Delta P(A)+P(B)+\Delta P(B)- \\ -(P(A)+\Delta P(A))(P(B)+\Delta P(B)) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$\boldsymbol{P(A+B)^+ = P(A)^- + P(B)^+ - P(A)^-\cdot P(B)^+}$	$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B)=P(A)-\Delta P(A)+P(B)+\Delta P(B)- \\ -(P(A)-\Delta P(A))(P(B)+\Delta P(B)) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$

Целевая установка	Вид задачи
$P(A+B)^{+} = P(A)^{+} + P(B)^{+} - P(A)^{+} \cdot P(B)^{+}$	$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B) = P(A)+\Delta P(A) + \\ +P(B)+\Delta P(B)-(P(A)-\Delta P(A))(P(B)+\Delta P(B)) \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A) \\ \Delta P(B) = k \cdot P(B) \end{cases}$
$P(A+B)^{+} = P(A)^{-} + P(B)^{+} - P(A)^{-} \cdot P(B)^{+}$	$\begin{cases} P(A+B)+\Delta P(A+B) = P(A)-\Delta P(A) + \\ +P(B)+\Delta P(B)-(P(A)-\Delta P(A))(P(B)+\Delta P(B)) \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A) \\ \Delta P(B) = k \cdot P(B) \end{cases}$
$P(A \cdot B)^{\pm} = P(A(\alpha))^{\pm} \times P((B \mid A)(\beta))^{\pm}$	$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = \\ = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B \mid A) \pm \\ \pm \Delta P(B \mid A)) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$P(A \cdot B)^{\pm} = P(A(\alpha))^{\pm} \times P((B \mid A)(\beta))^{\pm}$	$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B \mid A) \pm \\ \pm \Delta P(B \mid A)) \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A) \\ \Delta P(B \mid A) = k \cdot P(B \mid A) \end{cases}$
$P(A \cdot B)^{\pm} = P(A(\alpha))^{\pm} \times P(B(\beta))^{\pm}$	$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B) \pm \Delta P(B)) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$P(A \cdot B)^{\pm} = P(A)^{\pm} \cdot P(B)^{\pm}$	$\begin{cases} P(A \cdot B) \pm \Delta P(A \cdot B) = (P(A) \pm \Delta P(A))(P(B) \pm \Delta P(B)) \\ \Delta P(A) = k \cdot P(A) \\ \Delta P(B) = k \cdot P(B) \end{cases}$
$P(A)^{\pm} = P(H_1(\alpha))^{\pm} \times P(A \mid H_1) + P(H_2(\beta)^{\pm} \cdot P(A \mid H_2)$	$\begin{cases} P(A) \pm \Delta P(A) = \\ (P(H_1) \pm \Delta P(H_1))(P(A \mid H_1) + \\ +(P(H_2) \pm \Delta P(H_2))(P(A \mid H_2) \\ \dfrac{\Delta P(A)}{\Delta P(B)} = \dfrac{\alpha(H_1)}{\beta(H_2)} \end{cases}$
$P(A)^{\pm} = P(H_1)^{\pm} \times P(A \mid H_1) + P(H_2)^{\pm} \cdot P(A \mid H_2)$	$\begin{cases} P(A) \pm \Delta P(A) = (P(H_1) \pm \Delta P(H_1))(P(A \mid H_1) + \\ +(P(H_2) \pm \Delta P(H_2))(P(A \mid H_2) \\ \Delta P(H_1) = k \cdot P(H_1) \\ \Delta P(H_2) = k \cdot P(H_2) \end{cases}$

3. Формулы обратных вычислений для приближенных рассуждений

Целевая установка	Прирост аргументов (вид задачи)
$ct(b)^{+}=ct^{+}(a)\cdot ct(np)$	$ct(a)+\Delta ct(a)=\dfrac{ct(b)+\Delta ct(b)}{ct(np)}$
$ct(b)^{-}=ct^{-}(a)\cdot ct(np)$	$ct(a)-\Delta ct(a)=\dfrac{ct(b)-\Delta ct(b)}{ct(np)}$
$ct(b)^{+}=ct^{+}{}_{\min}(a)\cdot ct(np)$	$ct_{\min}(a)+\Delta ct_{\min}(a)=\dfrac{ct(b)+\Delta ct(b)}{ct(np)}$
$ct(b)^{-}=ct^{-}{}_{\min}(a)\cdot ct(np)$	$ct_{\min}(a)-\Delta ct_{\min}(a)=\dfrac{ct(b)-\Delta ct(b)}{ct(np)}$
$ct(b)^{+}=ct^{+}{}_{\max}(a)\cdot ct(np)$	$ct_{\max}(a)+\Delta ct_{\max}(a)=\dfrac{ct(b)+\Delta ct(b)}{ct(np)}$
$ct(b)^{-}=ct^{-}{}_{\max}(a)\cdot ct(np)$	$ct_{\max}(a)-\Delta ct_{\max}(a)=\dfrac{ct(b)-\Delta ct(b)}{ct(np)}$
$ct(k)^{+}=ct^{+}(a,\alpha)\times ct(np1)+ct^{+}(b,\beta)\times ct(np2)-ct^{+}(a,\alpha)\times ct(np1)\cdot ct^{-}(b,\beta)\times ct(np2)$	$\begin{cases} ct(k)+\Delta ct(k)=(ct(a)+\Delta ct(a))\cdot ct(np1)+(ct(b)+ \\ +\Delta ct(b))\cdot ct(np2)- \\ -(ct(a)+\Delta ct(a))\cdot ct(np1)\cdot(ct(b)+\Delta ct(b))\cdot ct(np2) \\ \dfrac{\Delta ct(a)}{\Delta ct(b)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$ct(k)^{+}=ct^{+}(a,\alpha)\times ct(np1)+ct^{-}(b,\beta)\times ct(np2)-ct^{+}(a,\alpha)\times ct(np1)\cdot ct^{-}(b,\beta)\times ct(np2)$	$\begin{cases} ct(k)+\Delta ct(k)=(ct(a)+\Delta ct(a))\cdot ct(np1)+(ct(b)- \\ -\Delta ct(b))\cdot ct(np2)- \\ -(ct(a)+\Delta ct(a))\cdot ct(np1)\cdot(ct(b)-\Delta ct(b))\cdot ct(np2) \\ \dfrac{\Delta ct(a)}{\Delta ct(b)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$
$ct(k)^{+}=ct^{-}(a,\alpha)\times ct(np1)+ct^{+}(b,\beta)\times ct(np2)-ct^{-}(a,\alpha)\times ct(np1)\cdot ct^{+}(b,\beta)\times ct(np2)$	$\begin{cases} ct(k)+\Delta ct(k)=(ct(a)-\Delta ct(a))\cdot ct(np1)+(ct(b)+ \\ +\Delta ct(b))\cdot ct(np2)- \\ -(ct(a)-\Delta ct(a))\cdot ct(np1)\cdot(ct(b)+\Delta ct(b))\cdot ct(np2) \\ \dfrac{\Delta ct(a)}{\Delta ct(b)}=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. – 1943. – № 39(5). – С. 195–198.

2. *Пригожин И.* Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» 2001. – 208 с.

3. *Романов А.Н.*, *Одинцов Б.Е.* Советующие информационные системы в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 487 с.

4. *Марселлус Д.* Программирование экспертных систем на ТУРБО ПРОЛОГЕ. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 256 с.

5. *Дик В.В.* Методология формирования решений в экономических системах и инструментальные среды их поддержки. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 300 с.

6. Прикладные нечеткие системы / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. – М.: Мир, 1993. – 368 с.

7. *Саати Т.* Принятие решений. Метод иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.

8. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 328 с.

9. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменой и его применение. – М.: Мир, 1976. – 215 с.

Учебное издание

Одинцов Борис Ефимович

ОБРАТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ФОРМИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Заведующая редакцией *Л.А. Табакова*
Редактор *В.В. Космин*
Младший редактор *Н.А. Федорова*
Художественный редактор *Ю.И. Артюхов*
Технический редактор *И.В. Завгородняя, В.Ю. Фотиева*
Корректоры *В.А. Самойлова, Г.В. Хлопцева*
Компьютерная верстка *И.В. Витте*
Оформление художника *Н.М. Биксентеева*

ИБ № 4799

Подписано в печать 08.06.2004
Формат 60x88/16. Гарнитура «Таймс»
Печать офсетная
Усл.п.л. 11,76. Уч.-изд. л. 9,77
Тираж 3000 экз. Заказ 2436. «С» 130

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7
Телефоны: (095) 925-35-02, 925-47-08
Факс (095) 925-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http://www.finstat.ru

ГП Псковской области «Великолукская городская типография»
Комитета по средствам массовой информации
182100, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95
E-mail: VTL@MART.RU